BULLETIN N° 157
ACADÉMIE EUROPEENNE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES

Séance du mardi 13 septembre 2011:

Accueil de Nathalie BULLE, DR au CNRS,
Pierre DEMEULENAERE, Professeur Paris IV ,
Préparation de la session « *Comportements sociaux* » du Colloque
« *Théories et Modèles en Sciences Sociales* »

Prochaine séance :
mardi 11 octobre 2011 de 18h à 20h

Maison de l'AX, 5 rue Descartes 75005 PARIS (Métro MAUBERT-MUTUALITE)

Accueil de Laurent CALVET , Pr de Finance à HEC
et Nizar TOUZI , Pr de Mathématiques financières à l'Ecole Polytechnique (UMR CNRS7641)
Préparation de la session « *Economie et Finances* » du Colloque
« *Théories et Modèles en Sciences Sociales* »

Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences
Site Web : http://www.science-inter.com

ACADEMIE EUROPEENNE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES

FONDATION DE LA MAISON DES SCIENCES DE L'HOMME

PRESIDENT : Pr Victor MASTRANGELO
PRESIDENT Sortant: Michel GONDRAN
SECRETAIRE GENERAL : Irène HERPE-LITWIN
TRESORIER GENERAL : Bruno BLONDEL
MEMBRES DU CA Patrice CROSSA-RAYNAUD, Claude ELBAZ

PRESIDENT FONDATEUR : Dr. Lucien LEVY (†)
PRESIDENT D'HONNEUR : Gilbert BELAUBRE
SECRETAIRE GENERAL D'HONNEUR : Pr. P. LIACOPOULOS (†)

CONSEILLERS SCIENTIFIQUES :
SCIENCES DE LA MATIERE : Pr. Gilles COHEN-TANNOUDJI
SCIENCES DE LA VIE ET BIOTECHNIQUES : Pr François BEGON

SECTION DE NICE :
PRESIDENT : Doyen René DARS

SECTION DE NANCY :
PRESIDENT : Pr Pierre NABET

Septembre 2011

N°157

TABLE DES MATIERES

Prochaine séance: mardi 11 octobre de <u>18h à 20h</u>

Maison de l'AX, 5 rue Descartes 75005 PARIS (Métro MAUBERT-MUTUALITE)

<u>Accueil de Laurent CALVET , Pr de Finance à HEC</u>
<u>et Nizar TOUZI , Pr de Mathématiques financières à l'Ecole Polytechnique</u>
<u>(UMR CNRS7641)</u>
<u>Préparation de la session « *Economie et Finances*» du Colloque</u>
<u>« *Théories et Modèles en Sciences Sociales* »</u>

ACADEMIE EUROPEENNE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES

Maison des Sciences de l'Homme, Paris.

Séance du Mardi 13 septembre 2011

La séance est ouverte à 18 h. 00 sous la Présidence de Victor MASTRANGELO et en la présence de nos collègues Gilbert BELAUBRE, Alain CARDON, Gilles COHEN-TANNOUDJI, Françoise DUTHEIL, Claude ELBAZ, Michel GONDRAN, Irène HERPE-LITWIN, Gérard LEVY,

Etaient excusés François BEGON, Bruno BLONDEL, Brigitte DEBUIRE, Jean -Pierre FRANCOISE, Walter GONZALEZ , Marie-Louise LABAT, Saadi LAHLOU, Valérie LEFEVRE-SEGUIN, Jacques LEVY, Pierre MARCHAIS, Emmanuel NUNEZ, ,Michel SCHOLL, Alain STAHL.

Après que notre Président d'Honneur, Gilbert BELAUBRE nous ait expliqué la raison du changement de locaux d'hébergement pour nos séances à la maison de l'AX, 5 rue Descartes, Paris 5ème, l' ordre du jour de notre séance appelle la préparation de la session « ***Comportements sociaux*** » de notre prochain Colloque **« *Théories et Modèles en Sciences Sociales* »** qui se tiendra à l'Université Diderot Paris VII, les 28 et 29 novembre prochains.

Deux spécialistes - le troisième, Gian Luca MANZO ayant été empêché - du domaine des comportements sociaux ont été invités : Nathalie BULLE, Directeur de Recherche au CNRS et Pierre DEMEULENAERE, Professeur à l'Université Sorbonne. Paris IV

Notre Président d'Honneur, Gilbert BELAUBRE explique préalablement aux invités quelques principes de base du colloque en insistant particulièrement sur ses références aux théories de Raymond BOUDON qui sera probablement en mesure de participer au Colloque. Il apprécie particulièrement le caractère « Bottom-up » de ses théories qui partent des individus pour expliquer le social et non de l'inverse (Top-down).

En l'absence du troisième intervenant, il est décidé de donner la parole successivement à Pierre DEMEULENAERE et Nathalie BULLE.

I) Intervention de Pierre DEMEULENAERE

Préalablement, notre Président Victor MASTRANGELO nous retrace le parcours scientifique de ce dernier :

Pierre DEMEULENAERE, Agrégé de Philosophie à l'origine, est Professeur de Sociologie à l'Université Paris-Sorbonne (Paris 4), Directeur du département de sociologie de l'université Paris-Sorbonne, Responsable de la spécialité "sociologie" du Master philosophie-sociologie de Paris 4, cohabilitée avec l'ENS de Cachan et Directeur adjoint du GEMASS.

Il a également enseigné dans quelques autres universités telles que Genève, Nancy II ou l'Institut d'Etudes Politiques.Par ailleurs, il est lauréat du Prix Joseph Saillet, Académie des Sciences Morales et Politiques, 2004

Pierre DEMEULENAERE présente ensuite ses idées de base. S'il n'a pas lui-même fait de modélisation, il s'est néanmoins attaché à une démarche épistémologique relative aux sciences sociales. Il s'intéresse particulièrement à la rationalité en Economie, à l'émergence de normes sociales. Il effectue une démarche (Bottom Up) de compréhension de la construction d'un objectif général à partir des intérêts individuels…L'intérêt général restant quelque peu « mystérieux ».

Il s'appuie sur une démarche déductive d'analyse et d'explication en sciences sociales. Il vient d'ailleurs d'éditer dans ce domaine : ***Analytical Sociology and Social Mechanisms*** **(ed.), Cambridge, Cambridge University Press, 2011** .

Un des problèmes principaux est la définition des lois en sciences sociales .Doit-on , d'autre part, s'écarter ou non du modèle déductif sachant qu'il existe deux modes de recherche en sociologie, à savoir l'un descriptif et l'autre explicatif. ? Comment démontrer à partir de données statistiques des lois de causalité et comment, dès lors, passer d'une sociologie descriptive à une sociologie normative et explicative?

Pour cela Pierre DEMEULENAERE nous propose d'intituler son intervention au colloque :
" ***Explication et raisonnement déductif en sciences sociales***".

Voici le résumé de sa future intervention :

Il existe trois approches différentes de recours aux données empiriques dans le cadre des sciences sociales : l'approche ethnographique ; l'approche quantitative ; le recours à l'expérimentation. Elles sont toutes trois présentes en sociologie. On oppose généralement entre elles ces trois démarches, la première étant plutôt descriptive ou « compréhensive », la deuxième établissant des relations de dépendance entre variables, et enfin les troisièmes décrivant la variation des comportements en fonction des conditions de l'expérience.

Le but de cette communication est de montrer que, dans les trois cas, pour interpréter les résultats des données, et parvenir à une explication, il faut recourir à des propositions générales. Celles ci sont de trois sortes.

-des propositions comportementales correspondant au savoir que l'on a sur les réactions caractéristiques des individus dans certaines circonstances.

-des propositions relatives aux normes et institutions en vigueur dans certaines situations, et qui créent des contraintes modifiant les comportements et les possibilités pratiques.

Ces propositions à caractère général sont nécessaires à l'intelligibilité des données empiriques. Elles interviennent à l'arrière plan des explications proposées. Elles sont elles mêmes plus ou moins évidentes, et ont en fait le statut de généralisations empiriques, même si leur degré de certitude est plus ou moins grand. Le raisonnement déductif ne recourt donc pas nécessairement à des lois, mais à des propositions générales sont le statut est variable.

Une formalisation des sciences sociales a notamment pour objet de préciser le statut de ces propositions générales et leur origine ; et de repérer ensuite les modes de déduction qui permettent de rendre compte et d'expliciter des données empiriques particulières.

Après développement de ses propositions, de nombreuses questions sont posées à l'intervenant par mi lesquelles :

- En quoi consiste l'expérimentation en Sciences Sociales ?

(Notre intervenant déclare que celle-ci est peu développée en Sciences Sociales , mais très développée en économie. Le biais des expériences tient au fait qu'elles reflèteraient un état normatif particulier dans une société donnée. Il signale l'utilisation de systèmes multi-agents.)

- A-t-on exploré les possibilités du « Data Mining. » pour extraire les variables pertinentes , les relations comportementales intéressantes?
- N'existe-t-il pas déjà en sociologie des approches de modélisation des systèmes complexes en cherchant des règles stabilisatrices ou non stabilisantes ?

(Notre intervenant répond qu'il existe des gens qui traitent les sociétés en tant que systèmes complexes , mais pas en sociologie. Les normes changent constamment ce qui contribue aux difficultés de trouver des schémas causaux.)

- Les normes ne seraient-elles pas des phénomènes émergents dans les systèmes sociaux ?

(Notre intervenant déclare que certes, des phénomènes nouveaux apparaissent avec passage à un niveau ontologiquement supérieur, mais comment les expliquer ?)

II) Intervention de Nathalie BULLE

Notre Président, Victor MASTRANGELO nous retrace le parcours scientifique de Nathalie BULLE.

Nathalie BULLE est Directeur de Recherche au CNRS au Groupe d'Etude des Méthodes de l'Analyse Sociologique de la Sorbonne (GEMASS, Paris). Elle est titulaire d'un Doctorat en Sociologie passé sous la direction de Raymond BOUDON. Ses recherches ont été développées dans trois domaines, <u>travaux de sociologie de l'éducation</u> portant sur l'évolution pédagogique notamment en France et aux Etats-Unis, <u>travaux portant sur les méthodes mathématiques appliquées à l'analyse comparée de l'inégalité des chances</u>, <u>travaux portant sur l'épistémologie des sciences sociales et particulièrement sur la modélisation de l'action humaine</u>.

Nathalie Bulle a présenté ses intérêts de recherche qui associent les questions éducatives et les questions épistémologiques en vertu du rapport étroit entretenu au cours de l'évolution des systèmes éducatifs entre grands modèles éducatifs et épistémologie dominante. Elle a résumé les résultats de ses recherches empiriques sur l'inégalité des chances, menées sur la base d'une mesure originale qu'elle a conçue pour appréhender « l'inégalité devant la sélection », permettant de séparer les effets de l'expansion des systèmes éducatifs, et les effets intrinsèques des politiques de démocratisation. Elle a évoqué, à partir du constat d'un échec relatif de ces politiques, le besoin d'une réflexion approfondie sur l'enseignement des grandes disciplines, et notamment la formation des enseignants.

Nathalie Bulle a ensuite abordé le cœur de son exposé, où la question de la nature des modèles dans les sciences naturelles et sociales a été discutée à partir d'une approche générale de la causalité inspirée par la théorie des concepts de l'épistémologue américain F. Northrop et la théorie de la connaissance du physicien H. Margenau. Les problèmes de la nature de l'explication offerte par les modélisations scientifiques, de la sous-détermination des modèles par les données de l'observation et de l'adéquation de la pensée formelle à la réalité phénoménale ont été abordées à partir de ces conceptions.

Dans ce contexte, elle nous propose comme titres de son intervention :

- Ou bien : « Evolution pédagogique »
- Ou bien : « Mesure de l’Inégalité des Chances »

Des questions sont posées à Nathalie BULLE, portant sur les méthodes d’enseignement des disciplines scientifiques.

Après ce riche débat, la séance prend fin.

Bien amicalement à vous,

Irène HERPE-LITWIN

Compte-rendu de la section Nice-Côte d'Azur

Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences Nice-Côte d'Azur

Ce n'est qu'une fois qu'ils se sont produits que l'on s'aperçoit combien les grands événements étaient faciles à prévoir.
Albert Thibaudet.

Compte rendu de la séance du 21 juillet 2011

(150ème séance)

<u>Présents</u> :

Richard Beaud, Patrice Crossa-Raynaud, Guy Darcourt, René Dars, Jean-Pierre Delmont, François Demard, Jacques Lebraty.

<u>Excusés</u> :

Jean Aubouin, René Blanchet, Sonia Chakhoff, François Cuzin, Maurice Papo, Jean-Marie Rainaud.

1- <u>Approbation du compte rendu de la 149ème séance</u>.

Le compte rendu est approuvé à l'unanimité des présents.

2- <u>Anniversaire de la 150ème réunion de l'Académie</u>.

Sur proposition du Président et de notre confrère Guy Darcourt, il est décidé de marquer la 150ème séance de notre Académie par un dîner au restaurant « Le Démodé », dans la vieille ville, le mercredi 26 octobre 2011, avec conjoints, après la conférence au MAMAC.

3- <u>Le mois écoulé</u>.

Notre confrère Demard confirme que le ministre Xavier Bertrand de passage à Nice le 28 juillet 2011 entre 10 heures et midi en profitera pour confirmer l'engagement de l'Etat pour la construction du nouveau cyclotron de haute énergie à La Lanterne. Conçu par M. Mandrillon, il représente un investissement de 25 millions d'euros. Il est unique au monde et permet de détruire les tumeurs cancéreuses jusqu'à 32 cm de profondeur.

4- <u>Les conférences au MAMAC</u>.

Pour la fin de l'année nous avons :

► Notre confrère Richard Beaud : *Religions et diversité*,
le mercredi 28 septembre 2011,

► Christian Lochon : *Le printemps arabe : unité et diversité*,
le mercredi 26 octobre 2011,

► Vincent Courtillot : *Volcanisme massif et extinctions en masse*,
le mercredi 23 novembre 2011.

En décembre, nous pensons avoir M. Guillemot sur l'éléphant en Inde.

Le 25 janvier 2012, notre confrère Jean-Marie Rainaud : *Diversité des droits et droit de la diversité.*

Mais ce thème « *La diversité* » n'est pas épuisé et nous envisageons d'autres contributions :

- Par notre confrère Lazdunski ou un de ses collaborateurs sur : « *Attaques et défenses* : *les divers venins* »,
- Par un astronome de Nice sur « *La diversité stellaire* » (Madame Gautier suggérée par Richard Beaud),
- Par Henry de Lumley (paléontologue) sur la grotte du Lazaret à Nice,
- Par Yves Coppens sur « *La diversité humaine* »,
- Par Jean-François Mattéi sur un sujet à débattre. Peut-être « *L'Europe ou le statut de la différence dans la pensée humaine* » ?
- Notre confrère François Demard aimerait parler de « *La voix, élément majeur de la diversité humaine* »,
- Notre confrère Jean Aubouin pourrait reprendre l'exposé prémonitoire qu'il avait fait en 2004 lors de notre colloque « *Science et jeunesse* »,
- Notre président René Dars devrait évoquer « *La diversité en géologie* ».
- Nous pourrions terminer par une table ronde, ce qui nécessite une grande préparation.

°°

Prochaine réunion
le jeudi 15 septembre 2011 à 17 heures
au siège : Palais Marie Christine - 20 rue de France
06000 NICE

Les conférences scientifiques de Nice
le mercredi 28 septembre 2011 au Mamac
Richard Beaud : « *Religions et diversité* »

Dîner de célébration de la 150ème séance de l'AEIS
le mercredi 26 octobre 2011
au restaurant « Le Démodé » rue Benoît Bunico à Nice

Annonces

I) **Notre Collègue Gilles COHEN-TANNOUDJI** nous fait part de son intervention dans le :

Colloque « Temps et Emergence »

Ecole Normale Supérieure, Salle Dussane, 45rue d'Ulm
14-15/10/2011
Métro Censier-Daubenton, Luxembourg, ou Monge.

Pour plus d'information consulter le site : http://www.studyoftime.org/ContentPage.aspx?ID=27

Titre de sa conférence le samedi 15 octobre à 10h10 intitulée :

« Relativité générale et cosmologie quantique :
l'universalité de l'émergence. »

II) **Notre Collègue André FRATINI** de la section NICE-CÔTE D'AZUR voudrait signaler à nos collègues académiciens la toute récente parution du Livre Rouge de C.G.Jung (*Le Livre Rouge*, L´Iconoclaste. La Compagnie du Livre Rouge, 2011) . Il s'agit d'un livre qui est une copie en format original du manuscrit sur lequel l'éminent psychanalyste suisse notait ses rèves et ses visions et les développait par le biais d'illustrations dignes d'un vrai artiste. Nous y trouvons les mandalas sur lesquels il méditait et les peintures visionnaires produits dans la période de 1913 à 1930 environ qui démarra par une séparation obligée: celle entre lui et Freud. Bien des biographies sont parues sur Jung, bien des aspects de son oeuvre ont été étudié, de celui scientifique à celui "mystique" en passant par la clinique, mais dans ce livre un nouvel aspect émerge avec vigueur: celui que j'ai défini "animiste" dans la récente conférence dont vous trouverez le texte ci-joint pour les collègues qui lisent l'italien.

Il s'agit donc d'une publication très importante pour comprendre la genèse d'une oeuvre et la complexité d'un esprit dont l'influence demeure et probablement demeurera encore longtemps sur la culture mondiale.

III) **Notre Collègue Christian HERVE** nous fait part du programme de la prochaine Université sur la maladie d'Alzheimer :

IV) **Notre Collègue le Pr Henri de LUMLEY** de l'Institut de Paléontologie humaine nous fait part de la Célébration du 40ème anniversaire de la découverte du Crâne de l'Homme de Tautavel , Arago XXI, un homo erectus européen « Homo Heidelbergensis » qui s'est déroulée à Tautavel en juillet 2011 – Pour tout renseignement, aller sur le site : **http://tautavel.univ-perp.fr**

V) **Jean-Jacques KUPIEC** du Centre Cavaillès à l'ENS Ulm nous fait part de la tenue du séminaire suivant auquel prendra part notre Collègue Jean Pierre FRANÇOISE:

Séminaire Math/Bio
Centre Cavaillès, 29 rue d'Ulm, 3ème étage
Mercredi 12 octobre, 13H30

René Thom et la Biologie: la bifurcation dynamique – Jean-Pierre Françoise (UPMC)

L'apport de René Thom à la modélisation ne se limite pas à la théorie des catastrophes. Dans son ouvrage « Esquisse d'une sémiophysique, Interéditions, 1988 », il souligne l'importance de l'équation de van der Pol et de son cycle de relaxation. Il discute aussi la notion de bifurcation dynamique où les paramètres sont remplacés par des variables lentes. Avec les progrès récents des neurosciences, de la physiologie cardiaque, de la physiologie hormonale, de la biologie des rythmes du vivant, on assiste au développement de modèles simplifiés qui facilitent l'analyse mathématique et l'interprétation de modèles plus complexes uniquement accessibles à la simulation numérique. Quelques exemples seront pris dans lesquels la bifurcation dynamique joue un rôle important.

Documents

Pour préparer la prochaine séance en présence de Laurent CALVET et Nizar TOUZY sur la modélisation en économie , nous vous proposons :

p. 13 : “:Empirical Evidence for Multifractals in Finance”, un texte faisant allusion aux nombreusx travaux de Laurent CALVET sur l’utilisation des fractales en théorie économique http://www.multifractal-finance.com/resources/35-articles/61-empirical-evidence-for-multifractals-in-finance

p. 33 Un texte de Jean-Philippe BOUCHAUD sur « La (regrettable) complexité des systèmes économiques :
http://www.sfpnet.fr/fichiers_communs/publications/articles/reflets_20_bouchaud.pdf

p.26 : « Mathématiques et finances par Emmanuel GOBET », Gilles PAGES et Marc YOR issu du site : http://www.maths-fi.com/gifs/mathematique-finance.pdf

Empirical evidence for multifractals in finance

http://www.multifractal-finance.com/resources/35-articles/61-empirical-evidence-for-multifractals-in-finance

Wednesday, 06 January 2010 20:15 MF

The statistical properties of financial markets have been the subject of academic study for well over half a century. In the last couple of decades the availability of high frequency data and computer-intensive methods of analysis for have helped to generate consensus on some aspects of the subject.

It is well known that many different types of financial market, such as equities, commodities, or foreign exchange markets, exhibit similar statistical properties, or ‘stylized features’ as they are sometimes called. One of the challenges in quantitative finance is being able to correctly identify and model these stylized features of asset returns.

Stylized features of assets

Below is a qualitative summary of some of the key statistical features found in most asset price time-series.

1. **Absence of autocorrelations in returns**. Whether the return is negative or positive today doesn’t help to predict if the return is negative or positive the following day.
2. **Heavy tails**. The unconditional distribution of daily returns has heavy tails when compared to the normal distribution. It exhibits high excess kurtosis.
3. **Gain loss asymmetry**. The unconditional distribution of daily returns tends to be negatively skewed. Large negative price movements are more common than large positive movements.
4. **Aggregational Gaussianity**. At short horizons, the distribution of returns is very non-normal, but it becomes progressively more normal as the time-horizon increases.
5. **Volatility clustering**. The volatility of asset returns is not constant, and seems to follow a mean reverting process. Periods of high volatility are followed by more high volatility and vice versa.
6. **Power-law decay of autocorrelation in absolute returns**. Asset volatility (and absolute returns) exhibits strong autocorrelation over a long horizon. The autocorrelation function follows a power-law decay

These features are evident in the figures below. In figure 1 we see the log-returns of the S&P 500 stock index. We can clearly see some periods of high volatility (evidenced by larger returns), and other periods of low volatility. Also evident are the substantial outliers. The largest negative return is due to the crash of ’87. Figure 2 shows log- returns generated using a simple Brownian motion model of asset returns. We can clearly see that this simple model has a constant volatility, and is not capable of capturing most of these stylized features.

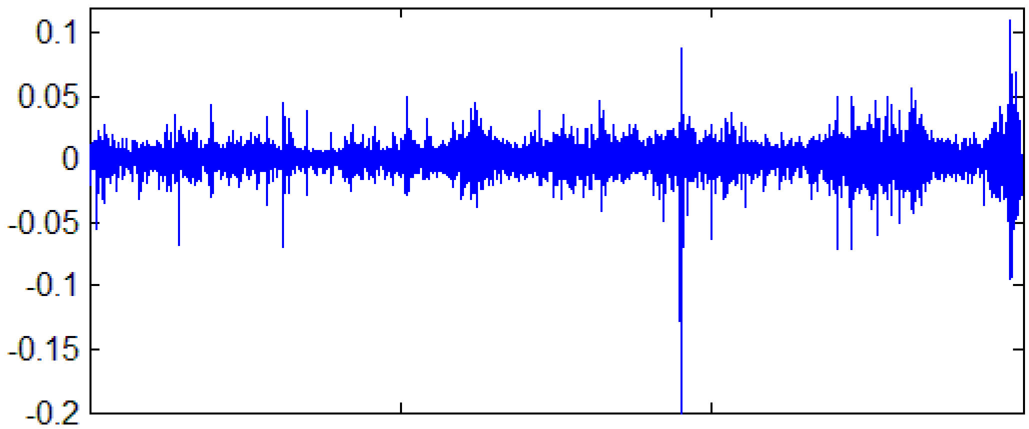


Figure 1: S&P500 log-returns 1950-2009

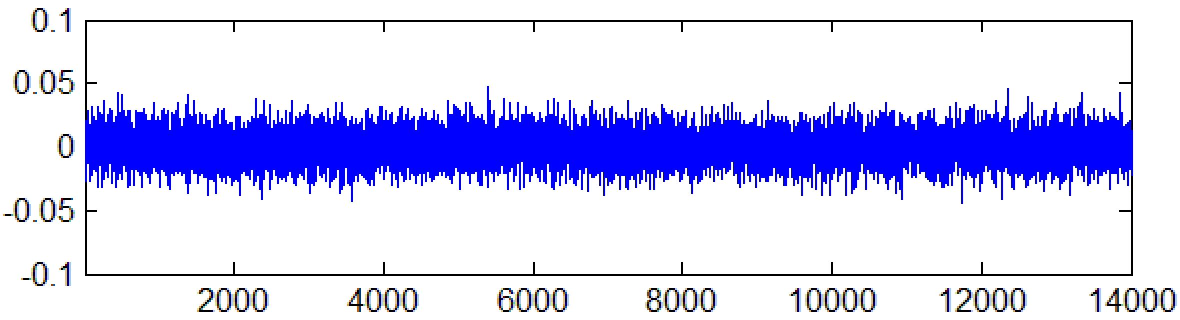


Figure 2: Simulated Brownian motion log-returns

In the left panel of figure 3 we see the autocorrelation function of the S&P 500 squared returns (where squared returns act as an approximation of the conditional variance of the returns). We can see that the squared returns show positive autocorrelation with past returns, and that the autocorrelation decays slowly – there is still a non-zero correlation between squared returns that occurred over 100 days ago, and squared returns today. This is evidence of the *long-memory* in asset volatility. The right hand pl ot in figure 3 is the same plot, but this time with a log-log scale. The fact that the autocorrelation decreases in a linear fashion shows that it is approximately fit by a power law.

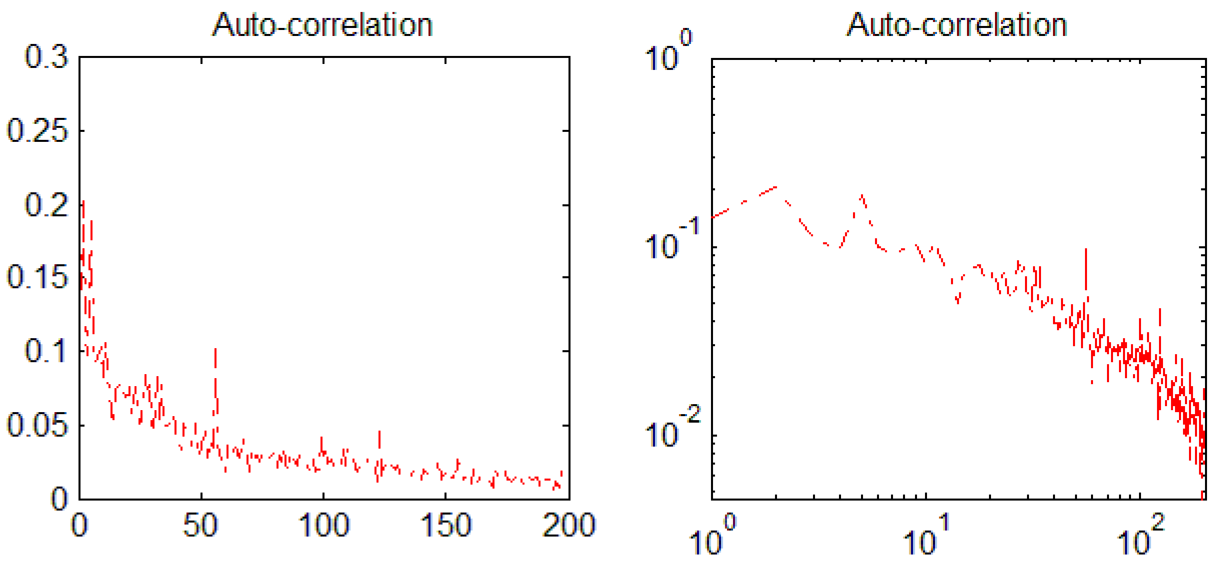


Figure 3: Autocorrelation of squared S&P500 returns

Multifractal models: Long memory, Autocorrelation and kurtosis

---

Louis Bachelier was perhaps the first person to use a Brownian motion to model the price of a financial asset, back in 1900. Since at least the 1960s the deficiencies of this model have been well documented, and many models have since been proposed to address these deficiencies. In particular, stochastic volatility (SV) and GARCH type models have had some success at addressing the issue of volatility clustering and autocorrelation. In these models volatility is treated as a separate a non-constant function of past returns (as in GARCH models), or as an additional stochastic processes (as in SV models). Whilst these models are able to generate autocorrelation in volatility, the autocorrelation function tends to decay far more rapidly than the decay observed in the data. The models do not capture the long-memory in volatility and the power law decay, and the models tend not to generate enough excess kurtosis in daily returns.

Multifractal models are able to better capture the long-memory, high excess kurtosis, and volatility autocorrelations, and are able to do so in a parsimonious way. Multifractal models are built around the concept of power-law scaling, and therefore also generate the power-law decay in autocorrelation.

The SV and GARCH type models have been extended to address the long memory in volatility, but these models tend to have a high number of parameters, and whilst they improve upon the in-sample fit of the basic GARCH(1,1) model, they often don’t improve the out-of-sample fit, suggesting that the models are over-parameterized.

Conceptually, multifractal models are quite different from other models of asset returns since they are based around multiplicative processes, and not additive processes. More importantly, multifractal models have been shown to statistically out-perform conventional models for a growing number of assets, including equities, foreign exchange and commodities markets.

Empirical studies

There is a growing body of literature which has documented and analyzed the multifractal behaviour of asset prices. Recent studies into the multifractal scaling financial time series include Calvet and Fisher (1999, 2002); Gallucio et al., (1997); Ghashghaie et al., (1996); Pasquini and Serva, (1999, 2000); Richards, (2000); Vandewalle and Ausloos, (1998); Mandelbrot (1997).

In addition to the work which looks at statistical properties of financial markets, a growing number of authors have proposed multifractal models and have documented the strong performance of these models. Papers include Bacry (2001, 2008); Bouchaud and Potters (2003); Calvet and Fisher (1997, 2001, 2004, 2006, 2007, 2008a 2008b); Idier (2010); Lux (1999, 2001, 2008).

We will take a look at some of these models in more detail in the following section.

References

1. Bacry, E., Delour, J., and J.-F. Muzy (2001). Multifractal random walks, Physical Review E 64, 026103-026106.
2. Bacry, E., Kozhemyak, A., and J.-F. Muzy (2008). Continuous cascade models for asset returns.
3. Bouchaud, J.-P., and M. Potters (2003). Theory of Financial Risk and Derivative Pricing. Cambridge University Press.
4. Calvet, L. E., and A. J. Fisher (1999). Forecasting multifractal volatility. Harvard University working paper and NYU Department of Finance working paper FIN-99-017. Available at http://w4.stern.nyu.edu/faculty/research.
5. Calvet, L. E., and A. J. Fisher (2001). Forecasting multifractal volatility. Journal of Econometrics 105, 27-58.
6. Calvet, L. E., and A. J. Fisher (2002a). Multifractality in asset returns: theory and evidence. Review of Economics and Statistics 84, 381-406.
7. Calvet, L. E., and A. J. Fisher. (2002b). Regime-switching and the estimation of multifractal processes.
8. Calvet, L. E., and A. J. Fisher (2004). How to forecast long-run volatility: Regime-Switching and the Estimation of Multifractal Processes. Journal of Financial Econometrics 2, 49-83.
9. Calvet, L. E., and A. J. Fisher (2007). Multifrequency news and stock returns, Journal of Financial Economics 86, pp. 178-212.
10. Calvet, L. E., and A. J. Fisher (2008a). Multifrequency jump-diffusions: an equilibrium approach, Journal of Mathematical Economics 44, pp. 207-226.
11. Calvet, L. E., and A. J. Fisher (2008b). Multifractal volatility: Theory, Forecasting, and Pricing. *Elsevier - Academic Press..*
12. Calvet, L. E., Fisher, A. J., and S. B. Thompson (2006). Volatility comovement: a multifrequency approach. Journal of Econometrics 131, 179-215.
13. Calvet, L. E., Fisher, A. J., and B. B. Mandelbrot (1997). Cowles Foundation Discussion Papers No. 1164-1166, Yale University. Papers available from http://cowles.econ.yale.edu or http://www.ssrn.com.

14. Cont, 2001 R. Cont, Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance* **1** (2001), pp. 223–236
15. Galluccio, S., Caldarelli, G., Marsili, M., and Y. C. Zhang (1997). Scaling in currency exchange, Physica A 245, 423-436.
16. Ghashgaie, S. Breymann, W., Peinke, J., Talkner, P., and Y. Dodge (1996). Turbulent cascades in foreign exchange markets. Nature 381, 767-770.
17. Lux, T. (2001). Turbulence in financial markets: the surprising explanatory power of simple cascade models, Quantitative Finance 1, 632-640.
18. Lux, T. (2008). The Markov-Switching Multifractal Model of Asset Returns: GMM estimation and linear forecasting of volatility, Journal of Business and Economic Statistics 26, 194-210.
19. Lux, T., and M. Marchesi (1999). Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. Nature 397, 498-500.
20. Pasquini, M., and M. Serva (1999). Multiscale behavior of volatility autocorrelations in a financial market, Economics Letters 65, 275-279.
21. Pasquini, M., and M. Serva (2000). Clustering of volatility as a multiscale phenomenon, European Physical Journal B 16, 195-201.
22. Richards, G. (2000). The fractal structure of exchange rates: measurement and forecasting, Journal of International Financial Markets, Institutions and Money 10, 163-180.
23. Vandewalle, N., and M. Ausloos (1998). Multi-affine analysis of typical currency exchange rates, European Physical Journal B 4, 257-261.

La (regrettable) complexité des systèmes économiques

Jean-Philippe Bouchaud (jean-philippe.bouchaud@cea.fr)
Capital Fund Management, 6 bd Haussmann, 75009 Paris
et École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex

Cet article est une version élaborée d'un article paru en langue anglaise dans
Physics World **22**, n n°4 (2009), pp. 28-32.

Il est de plus en plus clair que la dynamique erratique des marchés financiers est en très grande partie endogène –c'est-à-dire qu'elle résulte du fonctionnement interne des marchés et des boucles de rétroaction qui y sont présentes – plutôt que la conséquence de réactions rationnelles à des événements exogènes. Cette dynamique erratique a de nombreux points communs avec celle des systèmes physiques dits « complexes », comme les aimants désordonnés, où la combinaison hétérogénéités compétition conduit de manière générique à de longues périodes de stases interrompues par des crises violentes, et à une hypersensibilité à de faibles changements des paramètres extérieurs. Ces systèmes physiques pourraient s'imposer comme des métaphores utiles de la complexité des systèmes économiques.

La crise actuelle met la pensée économique classique sous pression extrême ; j'espère d'ailleurs qu'elle ne s'en remettra pas. La théorie classique veut qu'un marché complètement dérégulé atteigne un équilibre « efficient », qui permet une allocation optimale des ressources, et dont les prix reflètent parfaitement, de manière non biaisée, toute l'information disponible. De tels marchés devraient être stables : les crises ne peuvent apparaître qu'à l'occasion de chocs *exogènes*, mais jamais à cause de leur dynamique interne, qui serait faite de petites fluctuations – supposées gaussiennes – rapidement éteintes grâce à l'action d'agents rationnels prompts à « arbitrer », c'est-à-dire tirer profit de ces erreurs d'appréciation en les faisant disparaître.

On mesure depuis quelques mois l'ineptie d'un tel cadre théorique qui, pourtant, depuis sa formalisation mathématique des années 50 et 60, a revendiqué haut et fort le statut de théorie scientifique. Sa supposée victoire théorique (contre Keynes en particulier, dont la profondeur de pensée reste incroyablement actuelle) a été telle que plusieurs générations de dirigeants et de conseillers en ont fait leur *vade-mecum*, justifiant une politique de dérégulation des marchés de plus en plus agressive depuis une trentaine d'années, et qui est partiellement responsable de la crise. Toute contrainte est en effet censée éloigner les marchés de leur équilibre parfaitement efficient. Alan Greenspan lui-même avouait son désarroi en novembre dernier : *"Those of us who have looked to the self-interest of lending institutions to protect shareholders' equity, myself included, are in a state of shocked disbelief"*, avant d'ajouter : *"Yes, I've found a flaw in the theory. I don't know how significant or permanent it is. But I've been very distressed by that fact."* Il parlait de la théorie des marchés efficients, qui lui semblait tout d'un coup infondée. La théorie des agents rationnels a pourtant étendu son emprise sur d'autres domaines – aussi effarant que cela puisse paraître, il existe des théories rationnelles du mariage, du chômage, de l'obésité, de la toxicomanie, etc. Ce n'est pas le lieu de développer cette polémique ; mais, du point de vue de ses conséquences politiques et sociales, l'idée de l'homme infiniment rationnel, infaillible et donc irrémédiablement responsable de ses choix, me semble à titre personnel regrettable et terriblement dangereuse.

Mais cette idée est surtout non fondée scientifiquement, pour un certain nombre de raisons que je voudrais détailler. Lors de la première conférence de Santa Fe regroupant physiciens et économistes, Phil Anderson a émis son fameux *"Do you guys really believe that ?"*, qui résume assez bien la réaction des physiciens à ces hypothèses qui paraissent très peu plausibles et choquent l'intuition. En réalité, un certain nombre d'économistes sont eux-mêmes convaincus que ces hypothèses sont inadéquates. Pourtant, le mythe perdure et les manuels ont du mal à évoluer. Un argument souvent avancé est qu'il vaut mieux garder une hypothèse fausse qui permet le développement d'une théorie mathématique rigoureuse, plutôt que de s'aventurer dans la modélisation de l'infinie manière dont les agents pourraient ne pas être rationnels. Il me semble pourtant primordial que la modélisation en économie et en sciences sociales cherche à décrire l'homme tel qu'il est et non tel qu'il devrait être selon la théorie – émotif et capable d'erreurs plutôt que calculateur et infaillible.

« Il me semble primordial que la modélisation en économie et en sciences sociales cherche à décrire l'homme tel qu'il est et non tel qu'il devrait être selon la théorie – émotif et capable d'erreurs plutôt que calculateur et infaillible. »

Dynamique exogène ou endogène ?

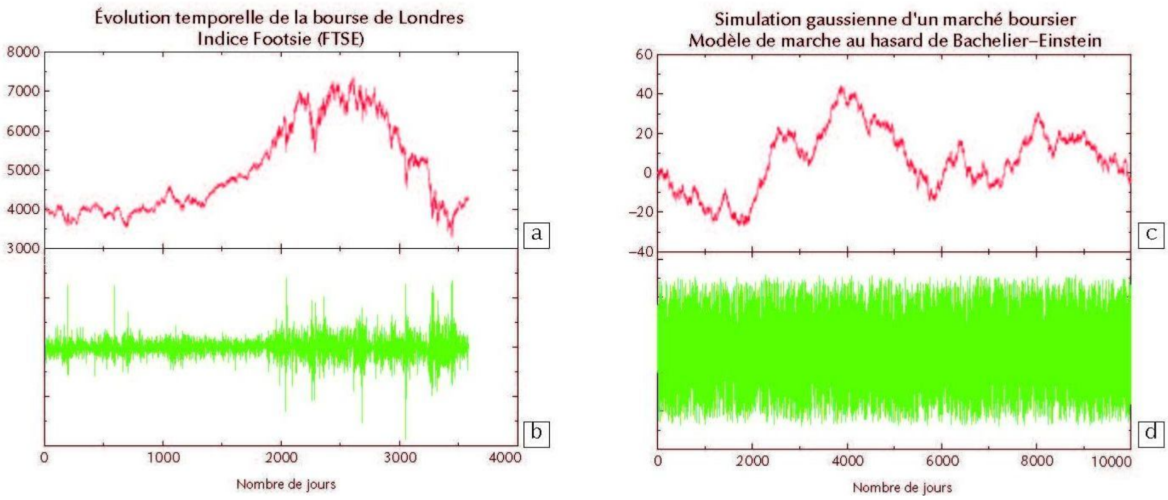
L'un des points les plus importants à comprendre, remis sur le devant de la scène en cette période de crise, est celui de la nature *endogène* ou *exogène* des fluctuations des marchés. Dans un marché efficient au sens informationnel, les prix reflètent la valeur intrinsèque des actifs, qui n'évoluent que sous l'effet de nouvelles exogènes. Un krach boursier ne peut donc se produire que si les conditions extérieures au système économique lui-même changent brutalement. Par exemple, un tremblement de terre à Tokyo qui détruit matériellement les infrastructures d'une société. De manière moins spectaculaire, le prix d'une société cotée ne devrait changer significativement que lorsque tombe une nouvelle concernant les perspectives futures de son activité.

Plusieurs travaux ont cherché à tester cette idée quantitativement, avec des résultats négatifs. Par exemple, Cutler, Poterba et Summers en 1989, dans *What moves stock prices?*, concluent qu'il est difficile d'attribuer la volatilité des marchés à des nouvelles macroéconomiques ou politiques. Robert Shiller a démontré l'innocuité des nouvelles qui entourent le « grand krach » de 1987. Plus récemment, nous avons mené une étude exhaustive des changements de prix des actions, échantillonnés à la minute et synchronisés avec le flux de dépêches. Nous avons trouvé que seulement 5% des sauts importants peuvent être attribués à une nouvelle concernant la société en question ; la majorité des sauts semblent être induits par la dynamique intrinsèque des marchés eux-mêmes. D'ailleurs, les deux types d'événements conduisent à des « répliques » (au sens des tremblements de terre) de signatures statistiques très différentes, ce qui montre bien qu'ils sont de nature distinctes. De manière plus globale, la statistique des variations de prix montre des spécificités qui ne sont pas naturelles dans le contexte de l'équilibre : distribution de Pareto (en loi de puissance, $x^{-\alpha}$) et donc fortement non gaussienne des variations de prix, intermittence multi-échelle de la volatilité (fig. 1), etc. La nature non gaussienne des fluctuations remet très sérieusement en cause la validité d'un standard de l'industrie financière: l'équation de Black-Scholes des options ou, de manière plus crue, le mythe du risque nul, qui sous-tend l'approche (trop) classique des mathématiques financières de valorisation par réplication parfaite (cf. encadré 1, p. 25), opération uniquement possible sous des hypothèses très fortes de fluctuations gaussiennes qui permettent en effet de se débarrasser du risque. Cette approche, encore encore dominante dans les manuels et les esprits, conduit à une mauvaise intuition et déresponsabilisation vis-à-vis du risque. L'ironie est que l'utilisation de l'équation de Black-Scholes, qui néglige la probabilité des grands mouvements, a eu comme conséquence d'amplifier considérablement le krach de 1987 par un effet de rétroaction positive des ordres de vente sur les prix !

Impact et boucles de rétroaction

Un effet crucial ici, négligé (à vrai dire escamoté) par la théorie économique classique, est l'impact des transactions sur les prix. Dans la vision classique, la valeur fondamentale est fixée en dehors des marchés eux-mêmes, qui ne font que la révéler en agrégeant l'information des opérateurs. En aucun cas les transactions « non informées » ne devraient affecter les prix, sinon on observerait un découplage entre valeur fondamentale et prix du marché.

L'accès aux données de ultra-haute fréquence (en dessous de la seconde), qui permet de suivre l'évolution du marché ordre par ordre, montre que chaque transaction, informée ou non, impacte les prix faiblement, certes, mais de manière systématique et mesurable (l'ordre de grandeur est de quelques % de % pour 1% du volume quotidien). L'existence de cet impact complète et renforce l'argument selon lequel les fluctuations de prix sont principalement endogènes. L'impact des transactions peut faire naître des boucles de rétroactions. Par exemple, l'utilisation du modèle de Black-Scholes conduit mécaniquement, dans certains cas, à une avalanche d'ordres de vente lorsque le cours baisse – précisément ce qui s'est passé en 1987. Ces boucles de rétroaction déstabilisantes sont monnaie courante, si l'on ose dire, et les plus embarrassantes sont celles qui sont dues à la théorisation des marchés ; la crise actuelle est, à nouveau, une illustration d'école de la nocivité potentielle des dogmes et de la modélisation. La sous-estimation du risque de défaut collectif d'un grand nombre d'entreprises dans les modèles de dérivés de crédit (les fameux CDOs) ont contribué à engendrer la crise, et donc le défaut collectif lui-même !



1. Marchés financiers : le Footsie et le mouvement brownien de Bachelier. On montre deux façons de représenter l'évolution temporelle des prix : le prix en fonction du temps (figs 1-a et 1-c), et sa « dérivée », c'est-à-dire les variations quotidiennes du prix, toujours en fonction du temps (figs 1-b et 1-d). Les deux cas considérés sont l'indice Footsie (FTSE) de la bourse de Londres (figs 1-a et 1-b), et les mouvements de prix synthétiques en supposant le modèle de mouvement brownien de Bachelier et Black & Scholes (figs 1-c et 1-d). Les différences entre le modèle et la réalité apparaissent à l'oeil nu. Les « pics » observés sur la figure 1-b correspondent aux grands mouvements de prix (à la hausse ou à la baisse), qui sont absents dans le modèle gaussien. La nature intermittente et multi-échelle des fluctuations est aussi apparente : les grands mouvements se produisent en grappe, et ces épisodes peuvent aussi bien durer *une minute que dix ans* (comme après la crise de 1929) ! La nature intermittente de la dynamique des prix suggère des analogies possibles avec d'autres systèmes complexes étudiés par

les physiciens : la turbulence, le bruit Barkhausen (fig. 2), le mouvement des fissures dans les matériaux hétérogènes ou d'une ligne de contact sur un substrat rugueux.

Analogies physiques

Revenons au caractère « anormal » de la statistique des fluctuations de prix : distribution en loi de puissance des variations de prix, intermittence multi-échelle de la volatilité, etc. Une observation très importante est l'universalité de ces résultats : il semble que quel que soit l'actif traité – actions, devises, matières premières, ou même la volatilité implicite sur les marchés d'options (voir encadré 1), à Londres ou à Tokyo, il y a 200 ans sur les marchés de céréales ou maintenant – on observe à peu près les mêmes caractéristiques. La phénoménologie empirique, en particulier les lois de puissance et la dynamique intermittente, frappe l'imagination du physicien statisticien car de nombreux systèmes complexes partagent cette phénoménologie, et le point crucial est que cette dynamique intermittente est purement *endogène*. Citons par exemple les écoulements turbulents, la progression d'un front de fissure dans un matériau désordonné, le retournement de l'aimantation dans un ferromagnétique désordonné (bruit dit de Barkhausen, figure 2). Dans tous ces exemples, le forçage extérieur, la dynamique *imposée*, est lente et régulière, mais la dynamique *réalisée* est, elle, irrégulière, intermittente, faite de périodes calmes et statiques interrompues par des bouffées instables, des avalanches d'activité. Par exemple, le front de fissure se coince temporairement avant d'avancer par à coups. Même si comparaison n'est pas raison, ces analogies sont frappantes.

Je voudrais discuter la façon dont des éléments, à mon avis essentiels, laissés de côté dans la modélisation classique de l'agent rationnel, pourraient assez naturellement conduire à une dynamique intermittente et « chaotique », endogène aux marchés. Un premier ingrédient crucial est l'imitation dans la prise de décision. La transcription du « modèle d'Ising en champ aléatoire » (RFIM, voir encadré 2, p. 26) permet de décrire des situations où il y a conflit entre opinions individuelles, information publique et pression sociale. Imaginons un ensemble d'agents qui ont des opinions *a priori* divergentes, par exemple optimistes (acheteurs) et pessimistes (vendeurs), avec toutes les gradations intermédiaires. Ces agents aux opinions hétérogènes sont par ailleurs influencés par des facteurs globaux qui évoluent lentement, par exemple les taux d'intérêt, l'inflation, les prévisions de dividendes futurs, etc. On suppose qu'il n'y a pas de « chocs », de discontinuités dans l'évolution de ces facteurs exogènes. Mais on postule que nos agents sont influencés par l'opinion de la majorité, ce qui semble un trait psychologique assez évident, amplifié par une pratique généralisée de jugement par comparaison, surtout en finance : on est toujours pardonné d'avoir eu tort avec la masse, et il est parfois difficile de justifier que l'on puisse avoir raison tout seul. Bref, dans ce modèle, on adopte l'opinion de la majorité si sa propre conviction *a priori* est plus faible que sa propension à l'imitationgrégaire.

Si tous les agents prenaient leur décision dans la solitude de l'isoloir, sans prêter attention à ce que pensent les autres (donc une propension à l'imitation nulle), l'opinion agrégée suivrait fidèlement les influences externes et, par hypothèse, évoluerait continûment. Mais de manière surprenante, si cette propension à l'imitation dépasse *un certain seuil* critique, l'évolution de l'opinion moyenne peut sauter brutalement, de façon discontinue, de l'optimisme vers le pessimisme, alors que les facteurs extérieurs se dégradent progressivement et continûment. De plus, une hystérèse apparaît. De la même façon que la vapeur saturée refuse de se transformer en liquide, l'état optimiste est maintenu de manière auto-référentielle, bien au-delà du point où les facteurs globaux auraient dû conduire au pessimisme. Lors de l'amélioration, l'optimisme revient lui aussi avec retard, personne ne voulant y croire parce que personne n'y croit.

Bien sûr, ce modèle est extrêmement simplifié, mais on ne peut pas ne pas voir de fortes ressemblances avec toutes les bulles de l'histoire économique et financière. La prise de conscience progressive des montagnes de dettes accumulées par les banques ces dernières années aurait dû conduire à une correction progressive des marchés, un « atterrissage en douceur », comme prévu par la théorie des marchés efficients. Au contraire, l'euphorie collective a perduré, faisant fi de tous les signes inquiétants avant de devenir insoutenable. La moindre étincelle, un événement anecdotique peut déclencher une crise d'une ampleur incommensurable à sa cause, comme en 1987 ou en 2008. Le modèle RFIM illustre l'impossibilité de représenter l'évolution de l'opinion moyenne, ou de la demande agrégée d'une population hétérogène, par celle d'un agent représentatif. Cette hypothèse est pourtant souvent invoquée pour passer de la modélisation des agents individuels au comportement « macroscopique », comme on dirait en physique, où le passage micro-macro est un thème récurrent et un problème en général difficile, surtout dans les matériaux hétérogènes !

Utilité et complexité

Je voudrais enfin revenir sur la modélisation classique des comportements individuels, en termes d'agents dits « rationnels ». Ce point de départ est décrit récemment par Ivar Ekeland comme le « cheval de bataille » de l'économie moderne. On suppose que les décisions prises sont le résultat d'un calcul qui permet à l'agent rationnel de maximiser sa « fonction d'utilité », censée mesurer sa satisfaction. Il ne s'agit pas pour lui de se contenter de solutions acceptables, mais bien de trouver le *maximum absolu* de cette fonction.

On peut opposer à cette idée un grand nombre de critiques. Une des plus profondes me paraît concerner le processus de maximisation lui-même. Il semble en effet que les défenseurs de cette théorie aient en tête des fonctions d'utilité que l'on peut qualifier de « simples », par exemple un paraboloïde à maximum unique, et faciles à déterminer – faciles dans un sens algorithmique. Dans cet exemple, une montée suivant le gradient local conduit rapidement au maximum, le temps de calcul croît lentement avec le nombre de variables N et il est plausible que l'esprit humain soit capable d'accomplir une telle tâche. Mais le problème est que ce type de fonction représente l'exception plutôt que la règle, et que de nombreux problèmes d'optimisation sous contrainte ne sont pas de ce type. La physique des verres de *spin* nous a en effet fait comprendre que, de manière générique, l'énergie (analoguede la fonction d'utilité) possède un nombre très grand, exponentiel en N, d'extrema locaux, et qu'un très grand nombre d'entre eux sont quasi dégénérés.

On est face à un mur exponentiel de complexité. Le maximum absolu est non seulement très difficile à trouver – le temps nécessaire aux meilleurs algorithmes est lui aussi exponentiel en N –, mais en plus il est à peine meilleur qu'une nuée d'autres maxima locaux. Ce maximum absolu est de surcroît très instable par rapport à de petits changements des paramètres qui déterminent la fonction d'utilité : la position relative des différents maxima locaux s'inverse très facilement. On est dans une situation similaire à celle du chaos des systèmes dynamiques, où une incertitude change la trajectoire et où la maîtrise de celle-ci demande une précision exponentielle. Le maximum absolu n'a donc pas de vertu particulière, et le maximum « acceptable » dépend énormément de l'heuristique, de l'algorithme utilisé pour le trouver.

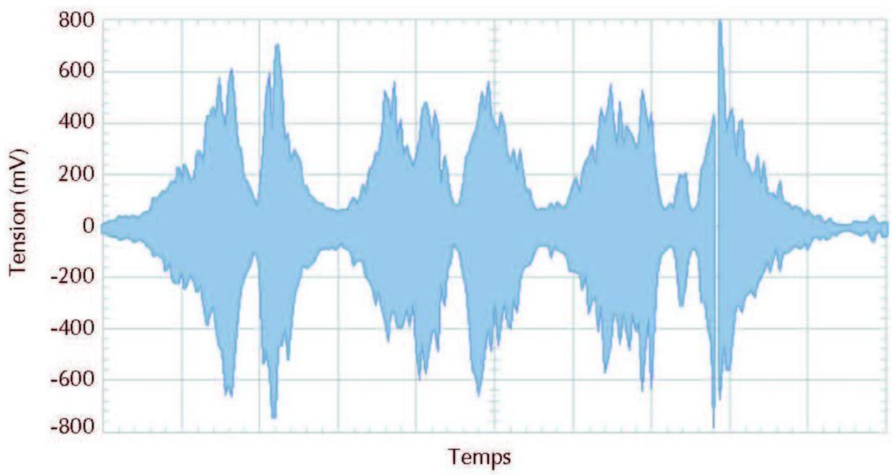
Dans ce contexte, la théorie de l'agent maximisant me semble en difficulté : comment imaginer que le cerveau humain puisse réaliser rapidement des opérations que les plus puissants ordinateurs, avec les meilleurs algorithmes, sont incapables de faire ? Comment imaginer que tout se passe « comme si » les agents trouvaient leur maximum absolu, alors que celui-ci est intrinsèquement instable ? Ou bien la théorie de l'agent rationnel n'est-elle valable que pour des situations suffisamment simples ? Dans le cas générique, la rationalité est donc *de facto* limitée, la décision finale (qui peut différer notablement dans ses conséquences) dépend de l'algorithme, de l'histoire, du choix précis des paramètres, etc. Même si le problème est intrinsèquement déterministe, il apparaît un aléa qui provient de ce choix incertain, qui fait boule-de-neige – puisque les stratégies individuelles ne peuvent plus supposer la rationalité auto-réflexive et infinie des autres agents.

Plus généralement, les systèmes économiques dans leur ensemble partagent un grand nombre des ingrédients qui sont à la base de la complexité exponentielle des systèmes de type « verres de *spin*» en physique : de nombreuses entités hétérogènes en compétition forte. La dynamique de ces systèmes est particulièrement intéressante et a fait l'objet d'études nombreuses ces dernières années. À cause du très grand nombre de minima locaux de l'énergie qui piègent temporairement le système, son évolution est très lente, avec de longues périodes de stases séparées par de rapides changements de configuration dominante. Le système n'atteint l'équilibre qu'au bout d'un temps extrêmement long, parfois bien plus long que les temps géologiques.

Si la métaphore « verres de *spin* » s'appliquait aux systèmes économiques, un changement profond de paradigme s'imposerait alors : • la notion d'équilibre, chère aux économistes, perdrait complètement son intérêt puisque le temps d'équilibre serait beaucoup trop long (les verres n'atteignent pas l'équilibre, même après des temps géologiques !) ;

• la dynamique hors équilibre, thème à ma connaissance assez peu abordé par l'économie classique, deviendrait alors le sujet pertinent ;

• les systèmes économiques complexes seraient alors fragiles et sensibles à de petites perturbations, et évolueraient de manière intermittente, en une succession d'époques quasi stables séparées par des « crises » imprévisibles, et ce même si les influences extérieures évoluent lentement et continûment. De « grosses » nouvelles ne sont pas nécessaires pour faire tanguer de tels marchés; leur instabilité est intrinsèque et vient de la compétition même entre agents hétérogènes.



2. Trace temporelle du « bruit Barkhausen » lors de l'aimantation d'un matériau magnétique désordonné soumis à un champ magnétique extérieur. Le champ tend à faire bouger les parois entre les domaines + et les domaines − pour faire disparaître les domaines dont l'aimantation lui est opposée. Le bruit Barkhausen est causé par le mouvement intermittent de ces parois lorsqu'elles se dépiègent des impuretés, puis se repiègent à un temps ultérieur. Cette dynamique est une succession *d'avalanches* multi-échelles, qui correspondent à des volumes de toutes tailles balayés par les parois lors de leur décrochement (voir J.P. Sethna *et al.*, *Nature* **410** (2001) 242).

Options – La réplication parfaite de Black et Scholes

Encadré 1

Une option est une sorte d'assurance contre les fluctuations des marchés financiers. Par exemple, on peut vouloir assurer son portefeuille boursier contre un effondrement des cours, et ainsi acheter une « option » qui fournit la garantie d'un prix de rachat minimum de ses actions. De nombreux produits de ce type sont en fait, de façon parfois cachée, déjà disponibles pour le grand public, et portent le nom d'investissements à capital garanti. Dans ce cas, la valeur minimale garantie est le capital initial.

Quel est le montant raisonnable de la prime d'assurance à laquelle doit consentir l'acheteur de l'option ? Le vendeur d'option peut-il suivre une stratégie optimale d'achat et de vente du « sous-jacent » (c'est-à-dire l'objet sur lequel porte l'option) de façon à minimiser son risque?

Il est clair que la réponse à ces deux questions nécessite une description de la dynamique du sous-jacent, un modèle probabiliste de son évolution future. Black et Scholes, en 1973, proposent une solution complète du problème en postulant que le logarithme du prix effectue un mouvement brownien.

La formule qu'ils obtiennent exprime la valeur de l'option comme une fonction de la volatilité du sous-jacent, c'est-à-dire sa propension à fluctuer, son coefficient de diffusion comme on dirait en physique. Les marchés d'options sont ainsi des marchés où s'échangent des anticipations de volatilité future, appelée « volatilité implicite » par les traders options. Mais le résultat le plus frappant de Black et Scholes est que la stratégie optimale est *parfaite*, dans le sens où l'assureur ne prend *aucun* risque ! Autrement dit, la stratégie de couverture permet une réplication parfaite de l'option, puisque les fluctuations de valeur de l'option sont exactement compensées par celles de la stratégie de couverture. Mais ce résultat est intimement lié à la nature supposée gaussienne des fluctuations et à la limite (irréaliste) du temps continu, où la fréquence des transactions tend vers l'infini. En présence d'effets non gaussiens (queues de distributions, volatilité stochastique, voir fig. 1), la possibilité de trouver une stratégie parfaite disparaît, et il subsiste un risque résiduel, qui représente en pratique une fraction très importante de la valeur de l'option.

Magnétisme désordonné : champs aléatoires et verres de *spin*

Encadré 2

Deux modèles phares ont été introduits pour décrire le magnétisme d'alliages désordonnés : d'une npart, le modèle d'Ising en champ aléatoire (RFIM en anglais), dans lequel chaque *spin* interagit de façon ferromagnétique avec ses voisins mais est soumis à un champ de signe aléatoire qui tend à rompre l'ordre ferromagnétique ; d'autre part, le modèle d'Edwards-Anderson (EA) des verres de *spin*, dans lequel l'interaction elle-même est de signe aléatoire, conduisant à un ordre amorphe. L'énergie d'une configuration des N *spins* S_i s'écrit : $H = - \Sigma_i h_i S_i - \Sigma_{ij} J_{ij} S_i S_j$, avec $J_{ij} = J > 0$ et h_i aléatoire pour le RFIM, et avec J_{ij} aléatoire et $h_i = 0$ pour le modèle EA.

Ces modèles ont été l'objet d'études analytiques et numériques intensives au cours des trente dernières années, et sont devenus des paradigmes théoriques pour la compréhension des systèmes complexes, bien au-delà des problèmes magnétiques qui leur ont donné naissance. Ils encodent de manière minimale les effets de compétition entre interaction et hétérogénéité. Un des aspects les plus importants, qui confère à ces modèles une richesse extraordinaire (duale d'une difficulté théorique redoutable) est l'existence d'un nombre exponentiel de **configurations métastables**, c'est-à-dire de minima locaux de l'énergie H.

Conclusion

Les modèles que je viens d’évoquer sont plus inspirants que convaincants. Ils restent, à ce stade, assez vagues et doivent être approfondis – en particulier en utilisant des simulations numériques de modèles d’agents pourconstruire des marchés artificiels réalistes.Mais ils racontent des histoires qui me semblent suffisamment intéressantes pour qu’on les prenne au sérieux. L’idée suivant laquelle le mélange compétition/hétérogénéités permet d’expliquer en grandepartie les crises endogènes des marchés et des systèmes économiques, me paraît assez plausible pour mériter qu’on s’y attarde.

En attendant, il me semble que l’état d’esprit dans lequel la science économique s’est développée et a irrigué l’ingénieriefinancière doit évoluer. Les innovationsfinancières doivent être analysées de manière critique, testées et réglementées par une agence indépendante et dotée d’une autorité, comme le sont les innovations dans d’autres industries à risque (nucléaire, chimique, pharmaceutique, aéronautique, etc.) : pourquoi l’industrie financière y échapperait-elle, à part pour des arguments de mauvaise foi dont la justification ultime est la recherche du profit maximum à court terme ? Mon avis est que la crise actuelle, qui a de graves répercussions sur le quotidien des gens, justifie le parallèle avec ces activités humaines dangereuses. Je pense que les préjugés hérités d’une éducation trop formelle, dogmatique et éloignée du réel font partie du problème. Une représentation mentale plus pragmatique, où l’intuition et les mécanismes remplacent l’axiomatisation et les modèles formels, et l’enseignement d’une science économique redevenue avant tout, et farouchement empirique, me semblent être des prérequis pour une stabilité du monde financier sur le long terme.

Mathématiques et finance

Emmanuel Gobet(1) Gilles Pagès(2) Marc Yor(3)

(1) Ensimag-INP Grenoble Laboratoire de Modélisation et Calcul
UMR 5523.
E-mail :emmanuel.gobet@imag.fr

(2) Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires,
UMR 7599, Université Paris 6, case 188, 4, pl. Jussieu, F-75252 Paris Cedex 5.
E-mail :gpa@ccr.jussieu.fr

(3) Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires,
UMR 7599, Université Paris 6, case 188, 4, pl. Jussieu, F-75252 Paris Cedex 5.
E-mail :deaproba@proba.jussieu.fr

L'importance croissante prise dans l'industrie bancaire et les métiers de l'assurance par l'utilisation des mathématiques, et plus particulièrement de la théorie des probabilités, depuis le début des années 1990 a suggéré aux auteurs de présenter ici quelques interactions entre Mathématiques et Finance et leurs répercussions au niveau de la recherche et de la formation en France dans ces domaines.

1 Un peu d'histoire

Les origines de la mathématisation de la finance moderne remontent à la thèse de Louis Bachelier [BAC00] intitulée *Théorie de la spéculation* et soutenue à la Sorbonne en 1900. Ces travaux marquent d'une part la naissance des processus stochastiques à temps continu en probabilités, et d'autre part celle des stratégies à temps continu pour la couverture de risque en finance. Du côté mathématique, sa thèse influença grandement les recherches de A.N. Kolmogorov sur les processus à temps continu dans les années 1920 et ceux de K. Itô – l'inventeur du calcul stochastique – dans les années 1950. En revanche, en ce qui concerne la finance, l'approche de Bachelier fut oubliée durant près de trois quarts de siècle, jusqu'en 1973 avec la parution des travaux de Black, Scholes et Merton[1] [BS73].

Revenons à cette époque des années 1970 pour mieux cerner le contexte. C'est alors qu'émerge la volonté politique de déréglementer les marchés financiers, rendant ainsi les taux d'intérêt volatiles et les taux de change instables. Dans un tel environnement dérégulé, les entreprises industrielles et commerciales sont soumises à des risques accrus, liés par exemple à l'extrême variabilité des taux de change : cette situation est inconfortable, tout particulièrement lorsque recettes et dépenses sont libellées dans des monnaies différentes (disons dollar et euro). Pour fournir aux entreprises des

[1] Pour cela, les deux derniers ont reçu le Prix Nobel d'Économie en 1997 (Black est mort en 1995).

outils adaptés à ces problèmes et plus généralement pour permettre aux compagnies d'assurance et aux banques de couvrir ces nouveaux risques, de nouveaux marchés organisés ont été créés, permettant aux intervenants d'échanger massivement des produits d'assurance. Cela marque l'émergence de nouveaux instruments financiers, dits ≪*produits dérivés*≫. L'option d'achat (ou *Call*) est le prototype de ces produits dérivés et reste encore aujourd'hui un des instruments les plus utilisés : dans l'exemple précédent, une telle option protège l'entreprise contre la hausse du taux de change euro/dollar. Acquise aujourd'hui par l'entreprise, elle va lui conférer le droit (mais pas l'obligation) d'acheter 1 dollar en échange de K euros (le *prix d'exercice* ou *strike* K est une caractéristique fixe du contrat) à la date future T fixée (appelée *maturité* ou *échéance*). Si le taux de change en question vaut S_t à la date t (*i.e.* 1 dollar = S_t euros), cette assurance revient du point de vue de l'entreprise à percevoir un montant $\max(S_T - K, 0)$ euros à la maturité T: si $S_T \leq K$, le taux d'achat du dollar est plus avantageux que celui prévu par le contrat et elle ne reçoit donc rien (et va changer ses euros en dollars sur le marché euro/dollar si nécessaire) ; en revanche si $S_T > K$, elle exerce son droit d'acquérir des dollars au taux plus avantageux garanti par le contrat d'option : 1 dollar = K euros (le nombre de dollars qui peuvent être achetés ainsi est aussi un terme du contrat d'option).

Deux questions se sont posées aux intervenants sur ces marchés : quel est le prix (appelé la *prime*) de tels contrats optionnels et quelle attitude adopter lorsqu'on a vendu un tel produit et ainsi endossé le risque – hausse du dollar contre l'euro à la maturité du contrat – en lieu et place de l'acheteur ? Si Bachelier avait établi dès 1900 dans sa thèse [BAC00] la connexion entre le prix de ce type d'instruments financiers et des calculs probabilistes relatifs à certains processus stochastiques, la question de la couverture du risque associé n'a été vraiment résolue qu'avec les travaux de Black, Scholes et Merton en 1973. À l'époque, l'idée de diversification du risque est déjà dans l'air du temps, grâce aux travaux pionniers de Markovitz[2] en 1952 sur l'optimisation de portefeuille : il propose une diversification du risque statique, fondée sur la répartition des actifs au sein d'un portefeuille. La problématique est encore différente en assurance de sinistres : la diversification s'y appuie sur le nombre d'assurés. L'approche novatrice de Black, Scholes et Merton, qui constitue encore aujourd'hui la clé de voûte de la finance moderne, consiste à diversifier le risque *sur le temps* (entre aujourd'hui et la maturité), en mettant en œuvre *une stratégie d'investissement dynamique.* Pour le Call sur le taux de change, cela consiste à acheter ou à vendre des dollars à chaque instant. Le ≪miracle≫ est complet lorsque Black, Scholes et Merton aboutissent à l'existence d'une stratégie dynamique optimale, explicitement calculable, *supprimant tous les risques possibles dans tous les scénarios de marché.*

Ce pas de géant a rendu possible le développement fulgurant de ces nouveaux marchés sous une forme organisée. Le premier d'entre eux s'ouvre à Chicago en 1973 (le CBOT, Chicago BOard of Trade), suivi rapidement par bien d'autres, aux États-Unis d'abord (Philadelphie, ...), puis partout dans le monde. La France emboîte le pas et crée le Matif en 1985 (devenu MArché à Terme International de France après plusieurs changements de signification de l'acronyme) puis le Monep en 1987 (Marché des Options Négociables de Paris). Les progrès technologiques (informatique, communications,...) et théoriques (mathématiques) ont aussi largement favorisé ces développements spectaculaires, comme nous allons le montrer maintenant.

[2]Prix Nobel d'Économie en 1990.

2 Le monde de Black, Scholes et Merton

Pour formaliser la notion de couverture dynamique, conservons l'exemple du taux de change. À la date 0, le vendeur reçoit de l'acheteur la prime C_0 (le prix du produit dérivé). Il va investir cette prime au cours du temps en dollars (américains). Plus précisément, il en achète une quantité (algébrique) δ_t à chaque instant t, le reste étant non investi (nous supposons ici pour simplifier le raisonnement que le taux d'intérêt, qui rémunère l'argent non investi, ici les liquidités en euro, est nul). Aucun apport extérieur d'argent ne doit intervenir dans sa gestion dynamique : on dira que son *portefeuille est autofinancé*. Si sa valeur au cours du temps est $(V_t)_{t\in[0,T]}$, alors sa variation infinitésimale doit satisfaire

$$V_{t+dt} - V_t = \delta_t\ (S_{t+dt} - S_t) \tag{2.1}$$

avec la contrainte d'obtenir à maturité T ce à quoi il s'est engagé auprès de l'acheteur, à savoir

$$V_T = \max(S_T - K, 0). \tag{2.2}$$

Arrivé à ce point de l'analyse, il devient important de préciser le modèle (stochastique) d'évolution du taux de change $(S_t)_{t\geq 0}$. Sans perdre en généralité, il est assez naturel de décomposer son rendement instantané comme la superposition d'une tendance locale et d'un bruit. Samuelson (1960), puis Black, Scholes et Merton (1973) proposent une modélisation du bruit à l'aide d'un mouvement brownien $(W_t)_{t\geq 0}$, ce qui conduit à une dynamique *infinitésimale* du type

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(W_{t+dt} - W_t). \tag{2.3}$$

L'amplitude locale du bruit est donnée par le paramètre σ (supposé non nul), appelée *volatilité*.

L'idée d'introduire le mouvement brownien pour modéliser l'aléa dans les cours de bourse remonte en fait aux travaux de Bachelier en 1900. Elle est intimement liée à la genèse même du mouvement brownien. Ce processus permet de rendre compte de manière simple de propriétés attendues, comme l'indépendance des accroissements ou l'invariance par changement d'échelle. Enfin, son comportement trajectoriel est très similaire à celui observé en pratique (voir la figure 1). Cependant, ce dernier point fait aujourd'hui débat, motivant des investigations au sein de classes plus vastes de processus, comme les mouvement browniens fractionnaires.

Encadré 1. DÉFINITION DU MOUVEMENT BROWNIEN. Le mouvement brownien est un processus gaussien, à accroissements indépendants et stationnaires : son accroissement $W_t - W_s$ ($0 \leq s < t$) suit une loi gaussienne centrée, de variance $(t - s)$.
BREF HISTORIQUE. C'est en 1827 que le mouvement brownien est associé aux trajectoires très irrégulières (en fait non dérivables comme fonctions du temps) de fines particules dans un fluide par le botaniste Robert Brown ; en 1900, Louis Bachelier l'utilise pour modéliser la dynamique des cours boursiers, puis Einstein en 1905, pour décrire une particule qui diffuse. Ce n'est qu'en 1923 que Wiener formalise sa construction. C'est le début de recherches mathématiques intensives qui se poursuivent toujours aujourd'hui et irriguent une large part des probabilités modernes.

En fait, la justification rigoureuse des écritures infinitésimales (2.1) et (2.3) n'est pas simple, puisque $(W_t)_t$ n'est pas à variation bornée, mais à variation quadratique finie. Le calcul stochastique développé dans les annés 1950 par K. Itô permet de résoudre ces questions techniques. Un calcul différentiel peut aussi être développé, avec pour base la formule d'Itô : pour toute fonction f suffisamment régulière, on a

$$f(t+dt, S_{t+dt}) - f(t, S_t) = \partial_t f(t, S_t)dt + \partial_x f(t, S_t)(S_{t+dt} - S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \partial^2_{x,x} f(t, S_t)dt. \tag{2.4}$$

La présence du terme supplémentaire $\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \partial^2_{x,x} f(t, S_t)dt$ faisant apparaître la dérivée seconde de f en la seconde variable provient de la variation quadratique finie du mouvement brownien. C'est en quelque sorte la marque de fabrique du calcul différentiel stochastique puisqu'il n'intervient pas dans le calcul différentiel ≪ordinaire≫.

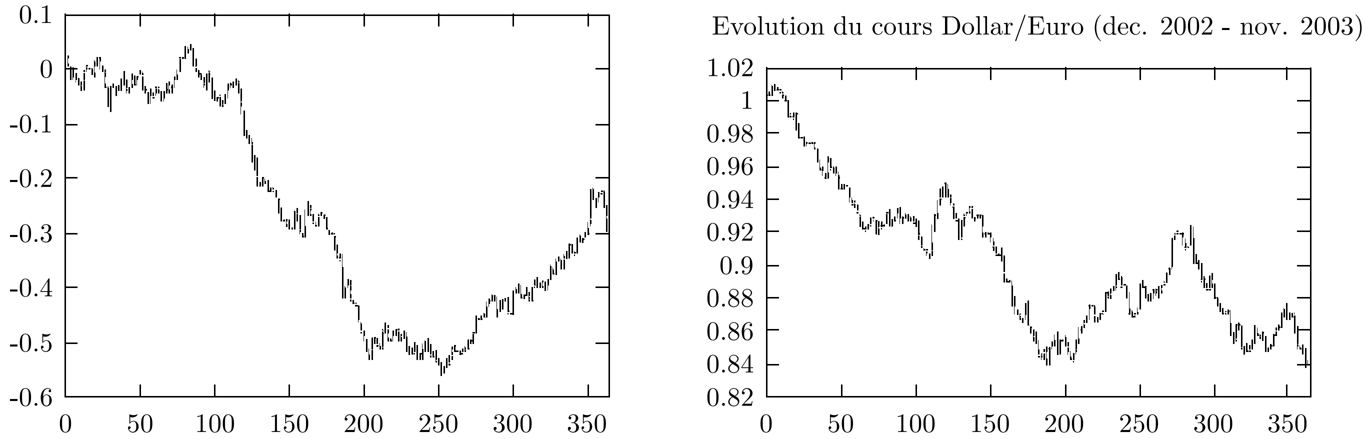


Figure 1: Simulation de trajectoire brownienne (à gauche) et évolution du taux de change dollar/euro (à droite) : plus que des ressemblances, comme un air de famille...

À l'aide de ces outils mathématiques, Black, Scholes et Merton résolvent le problème de couverture de l'option d'achat. En effet, si la valeur du portefeuille associée s'écrit $V_t = C(t, S_t)$, alors en identifiant les équations (2.1), (2.2) et (2.4), on a nécessairement d'une part $\delta_t = \partial_x C(t, S_t)$ et d'autre part $\partial_t C(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial^2_{x,x} C(t, x) = 0, C(T, x) = \max(x - K, 0)$. Cette dernière équation aux dérivées partielles se ramène par changement de variables à l'équation de la chaleur dont la solution, bien connue depuis longtemps, est explicite : on obtient ainsi la célèbre formule de Black & Scholes utilisée dans toutes les salles de marché du monde, donnant la valeur $V_0 = C(0, S_0)$ de l'option aujourd'hui. Il est alors remarquable qu'avec la stratégie ci-dessus, le vendeur de l'option parvienne dans tous les scénarios de marché à générer la *cible aléatoire* $\max(S_T - K, 0)$. Il est aussi surprenant de constater que la prime V_0 ne dépend du modèle (2.3) que par l'intermédiaire de la volatilité σ : en particulier le rendement local $(\mu_t)_t$ n'intervient pas dans la formule.

Encadré 2. Formule de Black & Scholes.
Le prix (ou prime) de l'option d'achat de maturité T et de prix d'exercice K est donné par la fonction

$$\begin{cases} C(t,x) = & x\mathcal{N}[d_1(x/K,t)] - K\mathcal{N}[d_0(x/K,t)], \\ d_0(y,t) & = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln(y) - \dfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \\ d_1(y,t) & = d_0(y) + \sigma\sqrt{T-t}, \end{cases}$$

où $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition de la loi normale, centrée réduite.
La stratégie de couverture associée est donnée à l'instant t par $\delta_t = C'_x(t,S_t) = \mathcal{N}[d_1(S_t/K,t)]$ parts de l'actif risqué.

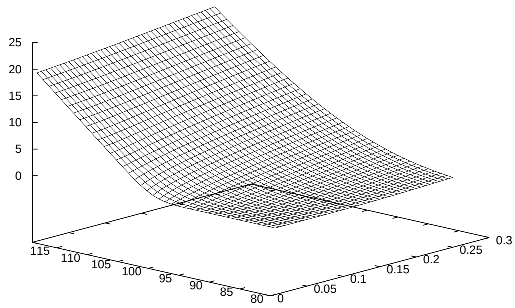


Figure 2 : Surface de prix en fonction de x et $T-t$

Reste enfin à comprendre pourquoi le prix de l'option est unique. L'hypothèse d'*absence d'opportunité d'arbitrage*, fondamentale en finance, va donner la réponse à ce problème : cette hypothèse exprime qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul. Ainsi pour l'option d'achat évoquée précédemment, si son prix était $V'_0 > V_0$, il suffirait de vendre un tel contrat, puis, avec la prime ainsi encaissée de suivre la stratégie $(\delta_t = \partial_x C(t,S_t))_{0\le t\le T}$ pour finalement générer *à coup sûr et à partir de rien* un profit $V'_0 - V_0 > 0$. Un raisonnement analogue vaut pour $V'_0 < V_0$: il suffit alors d'adopter une stratégie opposée – au sens mathématique du terme – à la précédente. Ceci montre finalement qu'il n'y a qu'un prix équitable, donné par la formule ci-dessus. Pour cette raison la stratégie δ_t est appelée *stratégie δ-neutre.*

Signalons pour terminer que le prix V_0 peut s'écrire aussi sous forme d'espérance mathématique, en utilisant la formule de Feynman-Kac liant la solution de l'équation de la chaleur et le mouvement brownien. Cette mise sous forme d'espérance de la valeur de la prime a ouvert la voie à de nombreux calculs explicites de primes d'options dans le cadre du modèle de Black-Scholes, mettant en évidence l'efficacité du calcul stochastique.

3 La pratique des marchés

La démarche décrite dans la section précédente, fondée sur la construction d'un portefeuille dynamique $(\delta_t)_{t\in[0,T]}$ *simulant* ou *répliquant* la valeur de l'option à sa maturité, à savoir $\max(S_T - K, 0)$ est au cœur de la modélisation en finance. On montre que ce type de situation se retrouve dans une classe beaucoup plus générale de modèles appelés marchés complets. Pour autant, on pourrait s'interroger en première analyse sur l'intérêt même de cette démarche : à quoi bon déployer tant d'efforts pour établir une formule donnant la valeur d'un contrat d'option à chaque instant de son existence, alors qu'il existe un marché négociable dont la raison d'être est précisément de fixer cette valeur par le jeu de l'offre et de la demande ? La réponse se cache en fait dans l'approche adoptée pour établir la formule. En effet, sans entrer dans le détail du fonctionnement d'un tel marché, il est clair qu'il existe à la maturité des gestionnaires (ou contreparties) des contrats d'option, qui *in fine* vont se trouver en face des détenteurs d'options et devront leur livrer la fameuse *cible stochastique* $\max(S_T - K, 0)$ euros (lorsque $S_T > K$ évidemment). Or que vont faire ces gestionnaires entre la date à laquelle ils ont encaissé la prime (en ayant vendu un contrat d'option) et sa maturité T ? Ils vont tout naturellement gérer en δ-neutre au fil du temps un portefeuille autofinancé constitué de δ_t actifs sous-jacents S à chaque instant t, afin de disposer de façon certaine (donc *sans risque*) de la cible stochastique $\max(S_T - K, 0)$ euros à la maturité : on parle aussi de *portefeuille de couverture* (on fait abstraction ici des coûts de transaction qui constituent la rémunération des acteurs du marché). Ils s'appuient pour ce faire sur la formule explicite donnant δ_t dans le modèle de Black-Scholes (cf. encadré 2). La formule précise importe peu ici, en revanche le point essentiel est la présence du paramètre de volatilité σ. Ce paramètre n'est pas observable instantanément sur le marché, il faut donc l'en ≪extraire≫ par une voie ou une autre. L'une, naturelle mais essentiellement ignorée par les financiers, est d'estimer σ statistiquement à partir de l'observation des cours. Ce comportement a-statistique a sûrement à voir avec la culture du milieu financier. Mais pas seulement : en fait les financiers ont beaucoup plus confiance dans le marché que dans le modèle. Forts de cette conviction, ils ≪inversent≫ le problème : la formule de Black & Scholes donnant le prix de l'option d'achat est fonction (cf. encadré 2) de paramètres connus à l'instant t – *i.e.* t, S_t, K, T – et d'un paramètre inconnu : la volatilité σ. On vérifie sans peine que la formule de Black-Scholes est une fonction strictement croissante et continue de σ, bijective sur l'ensemble des valeurs *a priori* possibles de l'option. Les gestionnaires utilisent alors le prix de marché pour extraire numériquement la *volatilité implicite*, unique solution à l'instant t de l'équation

$$C(t, S_t, T, K, \sigma_{\text{impl}}) = \text{Prime cotée}(t, K, T) \qquad \text{(pour une cotation de l'actif } S_t\text{)}.$$

Si le modèle de la dynamique de l'actif sous-jacent était adéquat, σ_{impl} vaudrait toujours σ au fil du temps, pour tous les prix d'exercice K. En pratique, il n'en est rien : la volatilité implicite varie non seulement avec le temps t, mais aussi selon les prix d'exercice K ! Ce phénomène est connu sous le nom de *smile de volatilité*, la courbe

$$K \mapsto \sigma_{\text{impl}}(t, K)$$

ayant dans certaines configurations de marchés la forme vaguement parabolique d'un sourire (voir Fig. 3).

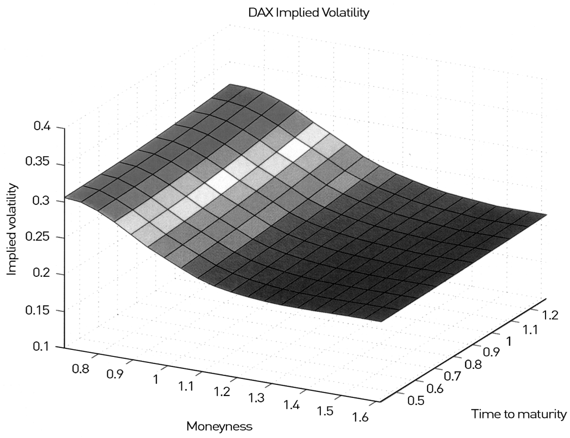


Figure 3 : Surface de volatilité implicite en fonction de K/S_0 et $T - t$ (simulation R. Cont).

Une fois extraite $\sigma_{\text{impl}}(t, K)$ du prix de marché par inversion numérique de la formule de Black-Scholes, le gestionnaire ayant vendu des options va ajuster son portefeuille de couverture en acquérant pour chacune des options de sous-jacent S, de prix d'exercice K et de maturité T dont il est contrepartie, exactement $\delta_t(S_t, \sigma_{\text{impl}}(t, K))$ actifs sous-jacents sur le marché de S.

Vu sous cet angle, on constate qu'un marché d'options négociables est donc un marché de la volatilité de l'actif sous-jacent à l'option. On observe là le comportement très pragmatique des agents face à l'inadéquation d'un modèle, plébiscité par ailleurs dès sa naissance pour sa maniabilité calculatoire. Dans un premier temps divers travaux ont confirmé le caractère qualitativement ≪robuste≫ du modèle de Black-Scholes : si le paramètre de volatilité σ est non plus constant mais aléatoire tout en restant compris entre deux bornes $\sigma_{\min}$ et $\sigma_{\max}$, alors les modèles de Black & Scholes de paramètres $\sigma_{\min}$ et $\sigma_{\max}$ encadraient les primes d'options du modèle général [EKJS98]. Mais de telles considérations qualitatives ne pouvaient satisfaire longtemps des utilisateurs que le krach de 1987 puis la crise asiatique de 1997 avaient rendus à chaque fois plus sensibles aux risques inhérents à la gestion des produits dérivés. L'idée a donc germé de mettre en place des modèles plus riches en paramètres, essentiellement en considérant la volatilité σ non plus comme un paramètre déterministe, mais comme un processus aléatoire, lui-même régi par un certain nombre de paramètres (voir plus bas). Ils entreprennent ensuite de caler – les financiers préfèrent l'anglicisme *calibrer* – sur les prix de marchés les plus liquides en tirant partie de son plus grand nombre de degrés de liberté. Cela se fait généralement *via* la *nappe de volatilité implicite* $(K,T) \mapsto \sigma_{\text{impl}}(t,K,T)$ (juxtaposition de smiles de volatilité pour les maturités présentes dans le portefeuille), toujours par inversion de la formule de Black-Scholes : on détermine ainsi les paramètres du modèle ≪enrichi≫ permettant de reproduire au mieux cette nappe. C'est une façon de caler les paramètres à partir des primes d'option cotées sur le marché, dans un univers compatible avec l'intuition et le mode de communication des praticiens, tous deux fondés sur la volatilité. Une fois ces paramètres déterminés, il ne reste plus qu'à calculer les couvertures attachées aux options contenues dans le portefeuille et, si nécessaire, les prix d'options non cotées, généralement exotiques (voir plus bas). Il est alors également possible de se projeter plus avant dans l'avenir en calculant par simulation informatique ou par des méthodes d'équations aux dérivées partielles, la structure probabiliste du portefeuille, dans une semaine ou dans un mois, notamment la probabilité de sortir d'une certaine épure fixée à l'avance : c'est l'objet de la *value at risk* (calcul de risque), avatar financier de l'intervalle de confiance [ADEH99].

Pour enrichir le modèle de dynamique de l'actif, tout l'arsenal probabiliste est appelé à la rescousse : ajout d'une composante de sauts à la dynamique de l'action, dépendance de la volatilité en la valeur de l'action ($\sigma = \sigma(S_t)$), modélisation de la dynamique de la volatilité par un processus de diffusion plus ou moins décorrélé du mouvement brownien W qui régit le cours de l'actif sous-jacent, adjonction de sauts au processus de volatilité, etc. L'escalade semble sans fin et sans espoir de fin, à ceci près que si le calage d'un modèle est d'autant plus aisé qu'il dépend de nombreux paramètres, sa stabilité est, elle, inversement proportionnelle à ce foisonnement. Une règle que certains apprennent à leurs dépens lorsque d'un jour à l'autre, les paramètres de calage de la nappe de volatilité varient du tout au tout, entamant quelque peu la confiance en le modèle.

Jusqu'à maintenant, par souci de simplicité, nous nous sommes cantonnés au cas très particulier d'une option d'achat. Si ce cadre est historiquement celui qui a vu naître la théorie (dans [BS73], avec pour actif sous-jacent une action ne distribuant pas de dividende), il n'est aujourd'hui qu'un exemple parmi d'autres – particulièrement simple – de produit dérivé. En concomitance avec les options d'achat sont nées les options de vente (*Put*), puis diverses combinaisons des deux (options *spread*, *saddle*, *straddle*, *butterfly*, ...) bientôt rejointes par d'innombrables ≪droits conditionnels≫ dépendant non plus seulement de la valeur de l'action à la maturité mais de toute sa trajectoire de cotations entre 0 et T : citons pour mémoire l'option (d'achat) asiatique qui n'est autre qu'une option d'achat sur la moyenne $\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$ des cours entre 0 et T, les options barrière(s), sans regret, cliquets, digitales, etc. Après des années d'euphorie technologique qui ont assuré le bonheur des virtuoses du mouvement brownien et de leurs étudiants, cette déferlante d'*options exotiques* semble se tarir quelque peu depuis le milieu des années 1990, l'estimation et la gestion du risque (*value at risk*, etc) prenant peu à peu le pas sur la complicité aussi féconde qu'inattendue entre probabilistes et commerciaux en produits dérivés. Signalons que ces options exotiques ne donnent généralement pas lieu à un marché négociable, mais plutôt à des transactions de gré à gré, y compris en direction des particuliers à travers les grands réseaux de banques de détail.

Si la nature des produits dérivés varie (presque) à l'infini, celle des supports (ou actifs sous-jacents) de ces produits n'est pas en reste, chacun d'entre eux introduisant une spécificité plus ou moins importante dans l'approche générale. Aux actions ne distribuant pas de dividende (en pratique les indices boursiers), sont venus s'adjoindre les options sur les taux de change, sur les contrats ≪futures≫ ([3]), sur les matières premières. Terminons cette énumération avec une mention toute particulière pour les produits dérivés sur obligations et taux d'intérêt dont l'actif sous-jacent commun est en quelque sorte la courbe des taux aux diverses échéances. Il s'agit d'un domaine d'une importance économique capitale de par les volumes qui s'y échangent et d'une grande complexité en termes de modélisation, puisqu'il s'agit de rendre compte des variations non pas d'une action ou d'un panier d'actions mais bien d'un (quasi-)continuum de taux (à 1 jour, 1 mois, 3 mois, 1 an, 3 ans , . . . , 30 ans) variant aléatoirement entre eux et dans le temps, de façon plus ou moins corrélée : une sorte de processus aléatoire à valeurs dans un espace de fonctions. Parmi les domaines ayant émergé ou en développement, citons notamment les questions liées à l'optimisation de portefeuille, aux coûts de transaction, aux *hedge funds*,. . . . Récemment le *risque de crédit* ou *risque de défaut* et les différents produits associés ont pris une importance déterminante : il s'agit de se protéger contre le risque associé à des obligations – non paiement des coupons, perte partielle ou totale du capital – émises par une entreprise susceptible de faire faillite.

Autre ≪variable qualitative≫ propre au monde des options, l'étendue des droits d'exercice ; jusqu'ici nous avons évoqué de façon implicite les contrats dits ≪*européens*≫ accordant à leur détenteur le droit de recevoir *à la date* T un flux monétaire égale à $\max(S_T - K, 0)$. Si ce droit est étendu à tout l'intervalle de temps $[0, T]$, c'est-à-dire si l'on peut exercer une et une seule fois à une date t de son choix le droit de recevoir $\max(S_t - K, 0)$, on parle alors d'option américaine. Il s'agit là d'un problème dit d'arrêt optimal induisant pour le détenteur du contrat une prise de décision en environnement aléatoire. La plupart des marchés organisés d'options sur actions ou indices traitent des options américaines.

4 Développements mathématiques

Le développement des marchés de produits dérivés dans les années 1970 et 1980, mais aussi les crises qui les ont secoués à plusieurs reprises ont puissamment contribué à l'épanouissement et au développement de diverses branches des mathématiques appliquées, en premier lieu des probabilités et du calcul stochastique ; le fait le plus marquant à ce jour reste sans doute le basculement brutal du mouvement brownien, de la formule d'Itô et des équations différentielles stochastiques du cénacle des probabilistes les plus purs. . . aux amphis des écoles de commerce ! L'exemple, en ce qui concerne les mathématqiues, n'est pas unique mais, à l'époque récente, il est particulièrement spectaculaire. Une autre spécificité notable est liée à la nature même des marchés financiers : activité humaine mûe par l'urgence, en permanente mutation, la modélisation y tient une place à la fois centrale et volatile : ce qui est vrai aujourd'hui peut ne plus l'être demain. Le mathématicien, par nature avide de problèmes, peut y trouver son compte : tout financier est avide de solutions ! Mais l'un et l'autre ne sont pas à l'abri parfois de quelques désillusions car là où le mathématicien s'attachera avant tout à une résolution rigoureuse et exhaustive du problème posé, le financier privilégiera l'≪interprétabilité≫ des modèles et de leurs paramètres (pour avoir une représentation mentale de l'univers des décisions possibles) et surtout la calculabilité (formules explicites, performances

[3] Contrats à terme négociables qui ont fait le succès du MATIF parisien jusqu'au milieu des années 1990, aujourd'hui négociés également à Francfort (BUND) et à Londres (LIFFE).

numériques,...) seule à même de préserver sa réactivité lors de transactions délicates (dont l'unité de temps est la seconde).

Le domaine où l'interaction avec la finance a été la plus forte est clairement celui des probabilités : calcul stochastique et mouvement brownien dans un premier temps, notamment lors de l'émergence des option exotiques. Puis, peu à peu, la complexité croissante des produits, l'escalade des modèles, la multiplication des indicateurs à calculer pour cerner le risque, ont conduit à des situations où les calculs explicites doivent au moins partiellement céder le pas à des méthodes numériques. Deux grandes familles de méthodes sont disponibles, celles issues de l'analyse numérique et celles issues des probabilités numériques. Chacune de ces deux disciplines peut se résumer en un mot ou presque : équations aux dérivées partielles pour l'une, méthode de Monte Carlo pour l'autre (calcul d'une moyenne par simulation informatique massive de scénarios aléatoires). Si l'analyse numérique, pilier historique des mathématiques appliquées en France, a trouvé là une nouvelle source de problèmes où mettre en œuvre des méthodes à l'efficacité souvent éprouvée, il est clair que les probabilités numériques ont connu, sous l'impulsion de la finance quantitative, un essor sans précédent, notamment en ce qui concerne les méthodes de discrétisation de processus (notamment sous l'impulsion de Denis Talay à l'Inria). La plupart des grands domaines des probabilités sont mis à contribution, jusques et y compris le calcul de Malliavin (ou calcul des variations stochastiques), venu récemment y jouer un rôle important, et à certains égards inattendu. D'autres champs des probabilités ont connu un véritable bain de jouvence comme toute la théorie de l'arrêt optimal *via* les options américaines, ou l'optimisation, omniprésente de la couverture moyenne-variance à la Föllmer-Sondermann aux innombrables algorithmes de calibration. Le développement des probabilités numériques et de la simulation ne s'est pas fait au détriment d'aspects plus théoriques puisque, depuis quelques années, les processus à sauts, plus communément associés aux problèmes de file d'attente et de réseaux, sont aujourd'hui eux aussi utilisés massivement en modélisation financière, généralement dans leurs aspects les plus sophistiqués (*processus de Lévy*, voir par exemple [CT04]).

Enfin, comme c'est souvent le cas dans ce type d'interaction, la modélisation financière a fait émerger en retour des problématiques nouvelles qui se développent de façon essentiellement autonome au sein des probabilités : c'est notamment le cas de questions soulevées par la généralisation de la notion d'arbitrage, soit à des espaces de processus de plus en plus généraux, soit à des modélisations plus réalistes des activités de marché (prise en compte de fourchettes d'achat-vente sur les cotations, bornes diverses sur les marges d'action des gestionnaires, etc).

5 Formation

Le développement des mathématiques financières dans les années 1980 a eu un impact fort en termes de formation en mathématiques appliquées, essentiellement en probabilités, sous l'impulsion initiale de Nicolas Bouleau, Nicole El Karoui, Laure Élie, Hélyette Geman, Jean Jacod, Monique Jeanblanc, Damien Lamberton, Bernard Lapeyre. Dès la fin des années 1980, les premiers cours de calcul stochastique orientés vers la finance se créent, notamment à l'École nationale des ponts et chaussées, puis rapidement à l'École polytechnique. Fait notable, les universités ne sont pas en reste, notamment sur le campus de Jussieu, et, à la même époque, s'ouvrent des cursus spécialisés en finance au sein des DEA probabilistes des universités Paris VI et Paris VII. Le succès est foudroyant et ne se dément pas : si la première promotion de la filière *Probabilités & Finance* du DEA de Probabilités et Applications de l'université Paris VI (en collaboration avec l'École polytechnique pour ce qui concerne la thématique Finance) ne comptait que 5 diplômés en 1991, depuis 2003 chaque promotion en compte généralement plus de 80. Une dynamique similaire est observée à l'université Paris VII. Entre temps les formations de 3^e cycle universitaire – DEA ou DESS – sont devenues Master (2^e année) ≪Recherche≫ et ≪Professionnels≫ respectivement. Aujourd'hui, rien qu'en Ile-de-France, et en se cantonnant spécifiquement à ces formations, trois autres formations orientées vers les mathématiques financières se sont développées avec succès : le DEA *Mathématiques Appliquées aux Sciences Économiques* de Paris IX (devenu Master 2 MASEF) et le Master 2 *Analyse & Systèmes aléatoires* (parcours Finance) à l'université de Marne-la-Vallée, le DESS *Ingénierie financière* à l'université d'Évry-Val-d'Essonne. Toutes font bénéficier les étudiants des points forts reconnus de leurs équipes de recherche locales (modélisation, calcul stochastique, probabilités numériques, économétrie, statistique,. . .). On peut évaluer entre 150 et 200 le nombre d'étudiants diplômés chaque année par ces seules formations universitaires franciliennes (qui fonctionnent souvent en partenariat avec des écoles d'ingénieurs ou de commerce et accueillent nombres d'élèves de ces établissements en quête d'une formation spécialisée de pointe). Du côté des écoles d'ingénieurs, outre l'École polytechnique, l'ENPC, l'Ensae, Sup'Aéro à Toulouse ou l'Ensimag à Grenoble, très en pointe dans ce domaine, de nombreuses filières spécialisées en mathématiques financières fleurissent et l'on peut ainsi évaluer à environ 15 % la proportion de polytechniciens accédant aux métiers de la Finance quantitative *via* leurs compétences mathématiques.

Au-delà de leurs spécificités ou de leurs orientations plus professionnelles ou académiques, ces formations sont un passage obligé pour les aspirants analystes quantitatifs (≪*Quant*≫ en anglais). Elles s'articulent autour des trois axes constitutifs de l'activité : modélisation (fondée notamment sur le calcul stochastique), probabilités et analyse numériques, optimisation, algorithmique et programmation (voir [EKP04] pour plus de détails). Il faut être conscient que les cellules de recherche des banques dans lesquelles nombre de *quants* entament leur carrière fonctionnent généralement comme prestataires pour d'autres services de leur institution (salle de marché, gestionnaire,. . .). Elles fonctionnent donc comme de petites structures de type PME. Ceci se révèle d'autant plus vrai dans des institutions de taille plus modeste (sociétés de gestion, fonds, etc). Il y a donc une véritable exigence de polyvalence.

L'impact des mathématiques financières s'observe aussi au sein de filières non prioritairement mathématiques. Notamment dans les programmes de formations plus anciennes couronnant généralement des études en économie ou en gestion (DEA *Banques & Finance* à Paris I, *203* à Paris IX, les formations d'actuariat comme celle de Lyon II ou de l'ENSAE,. . .) ou dans celui d'écoles de commerce comme HEC ou l'ESSEC à des degrés divers, parfois élevés, parfois plus utilitaires, les mathématiques (pour la Finance s'entend. . .) y prennent une place significative. Ceci illustre la place prise par la culture en mathématiques appliquées dans des domaines *a priori* moins ≪quantitatifs≫ comme la gestion ou la vente (*sales*, *trading*) d'actifs ou de produits financiers.

Si la France occupe une place de choix dans la formation des ≪*quants*≫, due en grande partie à l'importance traditionnellement accordée aux mathématiques dans la formation des jeunes français, l'emploi en Finance de marché est évidemment en rapport direct avec l'importance des places financières. Aujourd'hui l'Europe de la Finance et les emplois qui l'accompagnent se développent essentiellement à Londres où une part chaque année croissante de jeunes diplômés va mettre en œuvre le savoir-faire acquis dans l'Hexagone. Et Londres n'est pas, loin de là, leur seule destination : nombre d'entre eux n'hésitent pas à répondre à l'appel du large et s'en vont faire leurs premières armes à New York ou à Tokyo,. . .

En ce qui concerne notre capacité d'attraction d'étudiants étrangers dans ce contexte favorable, elle est incontestable ; même si elle reste freinée par la barrière de la langue et les problèmes d'adaptation au système français, notamment, en matière d'évaluation : le critère quasi unique retenu en France – la résolution de problèmes en temps limité – est loin d'être universellement adopté par le reste du monde et les étudiants étrangers y sont souvent mal préparés. À l'inverse, la quasi-gratuité de notre système d'enseignement supérieur devrait, si elle perdure, constituer à terme un atout majeur. Une spécificité qui ne manque pas d'étonner outre-Manche et outre-Atlantique où le coût des formations analogues s'élève à plusieurs dizaines de milliers d'euros.

En conclusion, constatons que le message a diffusé dans les générations montantes et que l'on observe de plus en plus d'étudiants de second cycle et d'élèves-ingénieurs qui poursuivent – voire parfois s'échinent à poursuivre – des études de mathématiques avancées dans l'unique but d'accéder ainsi aux métiers de la finance de marché. Que l'on s'en réjouisse ou qu'on le déplore, le calcul stochastique et, par extension, les probabilités et les mathématiques appliquées sont devenus depuis quinze ans ≪La≫ voie d'accès de la filière scientifique aux métiers de la finance de marché. À l'heure actuelle, c'est une autoroute, l'avenir dira ce qu'il en est.

References

Quelques références historiques

[BAC00] L. Bachelier, *Théorie de la spéculation*, thèse, *Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Sup.*, Série 3, janvier 1900, **17**: 21-86.

[BS73] F. Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**: 637-654, 1973 (May-June).

[CRR79] J.C Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein. Option pricing : a simplified approach, *Journal of Financial Economics*, 1979, **7**, pp. 259-261.

[GK83] M. Garman, S. Kohlhagen. Foreign currency option values, *Journal of International Money and Finance*, **2**:231-237, 1983.

[HK79] M. Harrison, D. Kreps. Martingales and Arbitrages in Multiperiod Securities markets, *J. of Econom. Theory*, **29**(3): 381-408, 1979.

[HP81] M. Harrison, S. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Process. Appl.*, 1981, **11**(3):215-260.

[ME73] R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell J. Econom. and Management Sci.*, **4**:141-183, 1973.

[Mer76] R.C. Merton. Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous, *J. of Financial Economics*, 1976, **3**:125-144.

Quelques références à vocation introductive (de niveaux d'accès variés)

[DJ03] R.A. Dana, M. Jeanblanc. *Marchés financiers en temps continu, valorisation et équilibre*, 2e édition, Économica, Paris, 1994. Traduction anglaise *Financial markets in continuous time.* Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Duf94] D. Duffie . Modèles dynamiques d'évaluation. P.U.F., Paris, 1994.

[EK02] N. El Karoui. Mesures et couverture de risques dans les marchés financiers, *MATAPLI*, **69**:43-66, 2002.

[EKP04] N. El Karoui, G. Pagès, Comment devenir *Quant* ?, téléchargeable à l'URL `http://www.maths-fi.com/devenirquant.asp`, 2004.

[FO01] H. Föllmer. Probabilistic Aspects of Financial Risk. Plenary Lecture at the Third European Congress of Mathematics. *Proceedings of the European Congress of Mathematics, Barcelona, 2000*, Birkhäuser (2001).

[FS02] H. Föllmer, A. Schied. *Stochastic Finance*, vol. 27, de Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2004, 2e edition. An introduction in discrete time.

[Hul03] J.C. Hull. *Options, Futures and other Derivatives*, Prentice Hall International, Editions. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2003.

[LL97] D. Lamberton, B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses édition Marketing, 2e édition, Paris, 1997. Traduction anglaise *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, 1996

[MAPR00] L. Martellini, P. Priaulet, *Produits de taux d'intérêt : méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture*, Économica, 2000.

[PB99] G. Pagès, C. Bouzitat, *En passant par hasard, les probabilités dans la vie quotidienne*, 3è édition, Vuibert, Paris, 2003. Partie IV, La Bourse et la vie: 185-258.

[RO04] T. Roncalli, *La gestion des risques financiers*, Économica, Paris, 2004.

Quelques références plus avancées

[ADEH99] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Elber, D. Heath. Coherent measures of risk. *Math. Finance*, **9**(3):203-228, 1999.

[CT04] R. Cont, P. Tankov, *Financial modelling with jump processes.* Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[DS98] F. Delbaen, W. Schachermayer. The fundamental theory of asset pricing for bounded stochastic processes, *Math. Ann.*, **312**(2):215-250, 1998.

[EKJS98] N. El Karoui, M. Jeanblanc, S.E. Shreve. Robustness of the Black and Scholes formula. *Math. Finance*, **8**(2):93-126, 1998.

[KS98] I. Karatzas, S.E. Shreve. *Methods of mathematical finance*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[MP02] D. Madan, S.R. Pliska editors. *Mathematical Finance Bachelier Congress 2000*, Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Selected papers from the 1st World Congress of the Bachelier Finance Society held in Paris, June 29-July 1, 2000.

[RT97] L.C.G. Rogers, D. Talay editors. *Numerical Methods in Finance*, Publications of the Isaac Newton Institute series, Cambridge University Press, 1997.